ROCZNIK POLSKIEGO TOW. MATEMATYCZNEGO

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ POLONAISE DE MATHÉMATIQUE

TOME XVI

ANNÉE 1937

KRAKÓW 1938

ROCZNIK POLSKIEGO TOW. MATEMATYCZNEGO

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ POLONAISE DE MATHÉMATIQUE

TOME XVI

ANNÉE 1937

RÉDACTEUR: STANISLAS ZAREMBA
SECRÉTAIRE DE LA RÉDACTION: STANISLAS CHRISTIAN ZAREMBA

KRAKÓW 1938



PRINTED IN POLAND

*

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

*

Reprodukcja fotooffsetowa, 1966
Zakład Graficzny PWN, Łódź, Gdańska 162

Table des matières

Étude du comportement asymptotique des solutions d'un système d'équations linéaires non homogènes aux différences du premier ordre à coefficients constants

par

M. Fréchet (Paris)

Introduction. M. Mihoc a fait récemment un usage intéressant, dans un mémoire *Sur les lois limites des variables liées en chaîne*[1]), du comportement asymptotique des solutions d'un système d'équations d'itération de la forme

$$(E) \qquad y_k(n) - \sum_{i=1}^{i=r} a_{ki}\, y_i(n-1) = f_k(n-1), \qquad k = 1, \dots, r$$

où les a_{ki} sont des constantes données, les $f_k(n-1)$ des fonctions données.

Désirant exposer la méthode de M. Mihoc dans le second livre, en cours d'impression, de mon ouvrage *Recherches modernes sur la Théorie des Probabilités*[2]), je me suis aperçu que les énoncés particuliers et le détail des démonstrations de M. Mihoc prêtaient à beaucoup d'objections de fond comme de forme[3]). J'ai donc dû, dans mon livre, n'emprunter à M. Mihoc que le principe de sa méthode. Et pour alléger mon livre de considérations ayant

---

[1]) Buletinul Facultatului de Stiinte din Cernauţi, vol. X, 1936, p. 1—26.

[2]) Le Premier livre (307 pages) vient de paraître chez Gauthier-Villars (1936). Le Second livre portera sur les évènements »en chaîne«.

[3]) M. Mihoc a bien voulu m'a informer que, pour des raisons techniques, il avait dû beaucoup abréger pour l'impression plusieurs passages de son manuscrit.

une portée mathématique indépendante du Calcul des Probabilités, j'ai cru bon de renvoyer les lecteurs au présent article consacré à une question de la Théorie des Différences. Nous y indiquerons des résultats dont plusieurs ne sont sans doute pas nouveaux. Mais il évitera, pour ceux qui ne seraient pas inédits, d'avoir à faire des recherches dans des mémoires dispersés et il constituera une suite naturelle à un article[1]) que j'ai consacré au cas homogène, celui où les $f_k(n-1)$ sont $\equiv 0$.

En comparant au travail cité plus haut de M. Mihoc, on verra entre autres: qu'en plusieurs points, on peut s'affranchir des hypothèses spéciales aux probabilités en chaîne

$$(T) \qquad \sum_{i=1}^{i=r} a_{ki} = 1; \qquad (P) \quad a_{ki} \geqslant 0$$

(et on pourrait même aller plus loin dans cette voie que je n'ai cru utile de le faire ici); qu'on peut se dispenser de l'usage encombrant de certains déterminants et arriver ainsi plus facilement au calcul explicite de certaines limites, enfin qu'on peut établir rigoureusement l'existence des développements limités employés, où le reste a des formes assez particulières.

Le présent mémoire comporte trois Parties entièrement distinctes dont les deux premières servent de préparation à la troisième.

Nous poserons, en général, dans la suite

$$a_{kj}^{(n)} = \sum_i a_{ki}\, a_{ij}^{(n-1)} \quad \text{avec} \quad a_{ij}^{(1)} = a_{ij}.$$

Nous nous limiterons au seul cas considéré dans notre article de Brno, celui où toute solution $y_i(n)$ reste bornée quond n varie, (condition qui est nécessairement réalisée dans l'application aux probabilités en chaîne[2])).

---

[1]) *Comportement asymptotique...* Publ. Fac. Sc. Université Masaryk, Brno 1933, nº 178.

[2]) M. Fortet m'a informé que cette application s'étend sans changement notable des démonstrations au cas d'une suite infinie dénombrable d'états possibles.

Première Partie: Généralisation des s_{kl}

Avant d'aborder le cas non homogène, nous reviendrons au cas homogène pour indiquer, après M. Doeblin[1]), qu'on peut étendre au cas borné général la définition de certaines quantités utiles s_{kl} que nous avons introduit précédemment et en particulier à la p. 18 de notre mémoire de Brno — en supposant alors que les $a_{kl}^{(n)}$ convergeaient quand n croît.

Rappelons d'ailleurs que si les $a_{kl}^{(n)}$ ne convergent pas toujours au sens ordinaire, ils convergent toujours au moins en moyenne, vers des quantités Π_{kl}, c'est-à-dire qu'on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\,[a_{kj} + a_{kj}^{(2)} + \ldots + a_{kj}^{(n)}] = \Pi_{kj}.$$

Première Partie: Généralisation des s_{jk}

Nous avions introduit des quantités $s_{jk} = \sum_{t=1}^{t=\infty}(a_{kj}^{(t)} - \Pi_{kj})$ qui n'étaient définies (Brno, p. 18) que dans le cas »non-oscillant«, celui où $a_{kj}^{(n)}$ converge au sens ordinaire vers Π_{kj}. M. Doeblin a étendu cette définition au cas général des probabilités en chaîne.

On peut même l'étendre comme suit au »cas borné« le plus général du système (H):

$$(H)\qquad \left|\begin{array}{l} x_k(n) - \sum_{i=1}^{r} a_{ki}\,x_i(n-1) = 0. \\ k = 1, \ldots, r \end{array}\right.$$

On sait (Brno, p. 8) qu'on peut écrire

$$a_{kj}^{(n)} = \varepsilon_{kj}^{(n)} + \overline{\omega}_{kj}^{(n)},$$

où

$$\varepsilon_{kj}^{(n)} = \sum_h (\sigma_h)^n\, w_{kjh}(n),$$

$$\overline{\omega}_{kj}^{(n)} = \Pi_{jk} + \sum_g w_{kjg}\, e^{ni\mu_g},$$

---

[1]) Dans sa *Thèse* en préparation.

où $|\sigma_h| < 1$, où $w_{kjh}(n)$ est un polynôme en n, où w_{kjg} et μ_g sont des constantes, les μ_g étant réelles et non multiples de 2π.

On voit que les $\varepsilon_{kj}^{(n)}$ convergent vers zéro avec $\frac{1}{n}$ et même convergent exponentiellement en ce sens qu'il existe des nombres T et q $(0 < q < 1)$ tels que

$$|\varepsilon_{kj}^{(n)}| < T q^n.$$

En effet, il suffit de prendre pour q un nombre inférieur à 1 et supérieur à tous les modules des σ_h, puis, comme

$$\varepsilon_{hj}^{(n)} = \left[\sum_g \left(\frac{\sigma_h}{q}\right)^n w_{kjh}(n)\right] q^n,$$

de prendre pour T un nombre supérieur à la borne supérieure, nécessairement finie, des quantités

$$\sum_{g'} \left|\frac{\sigma_h}{q}\right|^n |w_{kjh}(n)|.$$

Ceci étant, considérons la somme

$$R_{kj}^{(n)} = \sum_{t=1}^{t=n} [a_{kj}^{(t)} - \Pi_{kj}] = \sum_{t=1}^{t=n} \varepsilon_{kj}^{(t)} + \sum_{t=1}^{t=n} [\overline{\omega}_{kj}^{(t)} - \Pi_{kj}] = \alpha^{(n)} + \beta^{(n)}.$$

La première somme $\alpha^{(n)}$ converge au sens ordinaire quand n croît. La seconde somme,

$$\beta^{(n)} = \sum_g w_{kjg} \frac{e^{i\mu_g}}{1 - e^{i\mu_g}} - \sum_g \left[\frac{w_{kjg} e^{i\mu_g}}{1 - e^{i\mu_g}}\right] e^{ni\mu_g},$$

converge en moyenne vers

$$\beta_{kj} = \sum_g w_{kjg} \frac{e^{i\mu_g}}{1 - e^{i\mu_g}},$$

car

$$\frac{\beta^{(1)} + \dots + \beta^{(n)}}{n} = \beta_{kj} - \sum_g \frac{w_{kjg} e^{i\mu_g}}{1 - e^{i\mu_g}} \cdot \frac{e^{i\mu_g} - e^{i(n+1)\mu_g}}{n(1 - e^{i\mu_g})}.$$

Dès lors $R_{kj}^{(n)}$ converge en moyenne vers une certaine quantité s_{kj} et nous pouvons étendre au »cas borné« le plus général la définition des s_{kj} en la mettant sous la forme

$$s_{kj} = \text{limite en moyenne}_{n\to\infty} \sum_{t=1}^{t=n} [a_{kj}^{(t)} - \Pi_{kj}]. \tag{1}$$

Non seulement nous nous contentons dans cette formule de la limite en moyenne, mais nous ne pourrions, sans erreur, supprimer les mots »en moyenne« dans le cas borné le plus général, ni même dans le cas général où les conditions (P), (T) sont vérifiées.

Par exemple, si $r = 2$ et si le tableau des a_{kj} est

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \text{on a} \quad a_{kj}^{(n)} = \begin{cases} a_{kj} & \text{pour } n \text{ impair,} \\ 1 - a_{kj} & \text{pour } n \text{ pair,} \end{cases}$$

d'où $\Pi_{kj} = \frac{1}{2}$ et

$$R_{kj}^{(n)} = \begin{cases} 0, & \text{pour } n \text{ impair,} \\ a_{kj} - \frac{1}{2} \neq 0, & \text{pour } n \text{ pair.} \end{cases}$$

Ainsi la quantité $U_{kj}^{(n)} = R_{kj}^{(n)} - s_{kj}$ converge en moyenne vers zéro. Observons de plus que grâce à la relation $\Pi_{kj} = \sum_i a_{ki} \Pi_{ij}$, on peut écrire (Brno, p. 10)

$$U_{kj}^{(n)} = \sum_{t=2}^{t=n} \sum a_{ki} [a_{ij}^{(t-1)} - \Pi_{ij}] + a_{kj} - \Pi_{kj} - s_{kj},$$

ou

$$U_{kj}^{(n)} = \sum_i a_{ki} U_{ij}^{(n-1)} + \sum_i a_{ki} s_{ij} + a_{kj} - \Pi_{kj} - s_{kj}.$$

Les deux membres convergent en moyenne, ce qui donne d'abord la relation utile

$$\sum_i a_{ki} s_{ij} = s_{kj} - a_{kj} + \Pi_{kj} \tag{2}$$

et ce qui montre en outre que $U_{1j}^{(n)}, \ldots, U_{rj}^{(n)}$ fournissent, pour j fixe, un système de solutions (convergeant en moyenne vers zéro) du système (H). Il en résulte en particulier que les $U_{kj}^{(n)}$ restent bornés quand n croît.

Les s_{kj} satisfont à d'autres relations utiles. En opérant, comme plus haut, on verrait de même que

$$\sum_i s_{ki}\, a_{ij} = s_{kj} - a_{kj} + \Pi_{kj}. \tag{3}$$

On voit aussi que

$$R_{kj}^{(n+m)} = \sum_i a_{ki}^{(m)} R_{ij}^{(n)} + R_{kj}^{(m)}$$

de sorte qu'en faisant croître d'abord n seul:

$$s_{kj} = \sum_i a_{ki}^{(m)} s_{ij} + R_{kj}^{(m)}$$

et en faisant croître ensuite m,

$$\sum_i \Pi_{ki}\, s_{ij} = 0. \tag{4}$$

On aurait de même

$$\sum_i s_{ki} \Pi_{ij} = 0. \tag{5}$$

Nous retrouvons dans le cas borné le plus général les formules que nous avions déjà établies dans le cas non-oscillant (Brno, p. 19).

Deuxième Partie: Sommations généralisées

Dans ce qui suit, nous rassemblerons les démonstrations et les énoncés de lemmes concernant la convergence d'expressions de la forme $a_1^{(n)} u_n^{(n)} + \ldots + a_n^{(n)} u_1^{(n)}$ ou $\dfrac{a_1^{(n)} b_n^{(n)} + \ldots + a_n^{(n)} b_1^{(n)}}{n}$ quand n croît. Sans traiter la question sous cette forme générale; nous en considérons les cas particuliers qui nous seront utiles pour la suite ou qui sont connexes des premiers. Il n'est d'ailleurs pas certain que ces énoncés soient nouveaux, mais, sauf le Premier Lemme et une application déjà signalée par M. Marcel Riesz, nous ne les avons pas trouvés dans les ouvrages de reférence sur la théorie des séries.

Nous lemmes ont été formulés en vue de la Troisième Partie. En fait, le second nous est inutile et le troisième et le quatrième sont plus généraux que les cas particuliers cités plus loin, lesquels suffisent pour la Troisième Partie. Au moment de la correction

de ces épreuves, nous avons été informé par M. Obrechkoff qu'on peut déduire nos quatre premiers lemmes de théoremes généraux dûs à M. Toeplitz[1]) et à M. Schur[2]) et que cette déduction permet de remplacer certaines hypothèses figurant dans nos deuxième, troisième et quatrième lemme par des hypothèses plus générales encore.

Premier Lemme. *Quand la suite $a_1, \dots, a_n, \dots$ converge vers a et la série $u_1 + u_n + \dots$ converge absolument vers S, alors l'expression $\alpha_n = a_1 u_n + \dots + a_n u_1$ converge vers $a\,S$.*

Comme l'a observé M. Fortet, ce lemme est une conséquence de la multiplication des séries. Car en posant $v_n = a_n - a_{n-1}$, $v_1 = a_1$, on a

$$\alpha_n = \sum_{p=1}^{n} (v_1 u_p + \dots + v_p u_1) \to \sum v_p \sum u_p = a\,S.$$

On peut aussi en donner une démonstration directe.

En effet, soit $b_n = a_n - a$, on a:

$$\alpha_n - a(u_1 + \dots + u_n) = b_n u_1 + \dots + b_1 u_n. \tag{6}$$

Soit B une borne supérieure des b_n; posons $U_n = |u_n|$.

Soit ω positif arbitraire et soient p et q deux nombres tels que $|b_n| < \omega$ pour $n > p$ et $U_n + U_{n+1} + \dots < \omega$ pour $n > q$. On aura

$$|b_n u_1 + \dots + b_1 u_n| < \omega(U_1 + \dots + U_{n-p}) + B(U_{n-p+1} + \dots + U_n) <$$
$$< \omega(U_1 + \dots + U_n + \dots) + B\,\omega$$

pour $n - p + 1 > q$, où $n > p + q - 1$. Donc $b_n u_1 + \dots + b_1 u_n$ converge au sens ordinaire vers zéro, ce qui, en vertu de (6), établit la proposition.

---

[1]) O. Toeplitz, *Über allgemeine lineare Mittelbildungen*, Prace matematyczne, T. 21, 1911, p. 113—139.

[2]) Schur, *Über lineare Transformationen in der Theorie der unendlichen Reihen*, J. reine angew. Math. Bd. 151, 1921, p. 79—117.

Remarque. Si la série Σu_n ne converge pas absolument, le lemme n'est pas valable, même si les sommes partielles $s_n = u_1 + \ldots + u_n$ restent bornées. Soit par exemple:

$$\sum u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \ldots$$

Les s_n sont bornées car $0 < s_{2n} < s_{2n+1} < 1$. Prenons nuls les a d'ordre impair et prenons pour les a d'ordre pair:

$$a_{2m} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2m-1}}.$$

On a bien $\lim a_n = 0$, Σu_n converge et les s_n sont bornés. Les a_{2m} décroissent, donc on a:

$$a_{2m} = a_{2m} + \frac{a_{2m-2}}{3} + \ldots + \frac{a_2}{2m-1} > a_{2m}\left[1 + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2m-1}\right] = 1.$$

Donc a_{2m} ne tend pas vers $(\lim a_n)(\Sigma u_n) = 0$.

On peut généraliser ce premier lemme au cas où deux des trois convergences envisagées n'ont lieu qu'en moyenne (On dit que S_n converge vers S en moyenne quand $\frac{S_1 + \ldots + S_n}{n}$ converge vers S au sens ordinaire).

Il y a lieu de noter que les propriétés suivantes d'une suite $a_1, \ldots a_n, \ldots$ qui converge au sens ordinaire vers un nombre a:—les a_n sont bornés dans leur ensemble, les $|a_n - a|$ convergent vers zéro, — ne se conservent pas[1]) si la convergence des a_n vers a n'a lieu qu'en moyenne.

Second Lemme. *Soit $a_1, a_2, \ldots$ une suite de nombres bornés dans leur ensemble, qui converge en moyenne vers un certain nombre a; $u_1 + \ldots + u_n + \ldots$ une série qui converge au sens ordi-*

---

[1]) Si l'on prend, par exemple, pour la suite des a_n, les nombres $\sqrt{n}$ et $-\sqrt{n}$ alternativement, on voit bien que a_n converge vers $a = 0$ en moyenne, mais que la suite des a_n n'est pas bornée et que celle des $|a_n - a| = \sqrt{n}$ ne converge pas en moyenne vers zéro.

naire vers une certaine somme S, alors la quantité

$$\alpha_n = a_1 u_n + \dots + a_n u_1$$

converge en moyenne vers a S.

Il s'agit d'établir la convergence de

$$r_n = \frac{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}{n} = \frac{a_1 S_n + a_2 S_{n-1} + \dots + a_n S_1}{n}.$$

En posant $a_n - a = b_n$, $S_n - S = c_n$, on trouve

$$r_n = aS + \frac{ac_1 + \dots + ac_n}{n} + \frac{Sb_1 + \dots + Sb_n}{n} + \frac{b_1 c_n + \dots + b_n c_1}{n}.$$

Les deuxième et troisième termes tendent vers zéro. Tout est donc ramené à démontrer que le terme $d_n = \frac{b_1 c_n + \dots + b_n c_1}{n}$ ou encore $\frac{|b_1 c_n| + \dots + |b_n c_1|}{n}$ tend vers zéro.

Les nombres $|b_1|, \dots, |b_n|$ sont bornés supérieurement par un nombre fini H. On a alors

$$|d_n| \leqslant H \frac{|c_1| + |c_2| + \dots + |c_n|}{n}$$

Dès lors d_n tend vers zéro.

Troisième Lemme. *Supposons qu'une suite de nombres quelconques $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ converge vers a en moyenne arithmétique, et que, d'autre part, $u_1^{(n)}, u_2^{(n)}, \dots, u_n^{(n)}$ soient des nombres $\geqslant 0$, non décroissants ($u_1^{(n)} \leqslant u_2^{(n)} \leqslant \dots$) tels que $nu_n^{(n)}$—ou même plus généralement $n(u_n^{(n)} - u_1^{(n)})$ — soit borné, enfin dont la somme S_n converge vers un nombre fini S.*

Alors la quantité

$$T_n = a_n u_1^{(n)} + \dots + a_{n-p} u_{p+1}^{(n)} + \dots + a_1 u_n^{(n)}$$

converge au sens ordinaire vers aS.

Il suffit évidemment de démontrer que zéro est la limite de

$$U_n = T_n - aS_n = c_n u_1^{(n)} + \dots + c_1 u_n^{(n)}$$

où $c_n = a_n - a$ converge vers zéro en moyenne arithmétique. C'est dire que si l'on pose $c_1 + \dots + c_n = n\varepsilon_n$, ε_n converge vers zéro au sens ordinaire. On a alors

$$U_n = [n\varepsilon_n - (n-1)\varepsilon_{n-1}]u_1^{(n)} + [(n-1)\varepsilon_{n-1} - (n-2)\varepsilon_{n-2}]u_2^{(n)} + \dots +$$
$$+ (2\varepsilon_2 - \varepsilon_1)u_{n-1}^{(n)} + \varepsilon_1 u_n^{(n)} =$$
$$= \varepsilon_n n u_1^{(n)} + \varepsilon_{n-1}(n-1)[u_2^{(n)} - u_1^{(n)}] + \dots + \varepsilon_2 2[u_{n-1}^{(n)} - u_{n-2}^{(n)}] +$$
$$+ \varepsilon_1[u_n^{(n)} - u_{n-1}^{(n)}] =$$
$$= \varepsilon_n g_1^{(n)} + \varepsilon_{n-1} g_2^{(n)} + \dots + \varepsilon_2 g_{n-1}^{(n)} + \varepsilon_1 g_n^{(n)},$$

où les g sont tous $\geqslant 0$, avec

$$g_1^{(n)} + g_2^{(n)} + \dots + g_{n-1}^{(n)} + g_n^{(n)} = nu_1^{(n)} + (n-1)[u_2^{(n)} - u_1^{(n)}] + \dots + [u_n^{(n)} - u_{n-1}^{(n)}] =$$
$$= u_1^{(n)} + u_2^{(n)} + \dots + u_n^{(n)} = S_n,$$

de sorte que $g_1^{(n)} + \dots + g_n^{(n)}$ converge vers S.

Puisque ε_n tend vers zéro, il y a un nombre Ω supérieur en valeur absolue à tous les ε_n. Soit, pour tout entier p, ω_p la borne supérieure (nécessairement finie) de $|\varepsilon_{p+1}|, \dots, |\varepsilon_n|, |\varepsilon_{n+1}|, \dots$.

ω_p tend vers zéro avec $\dfrac{1}{p}$ et on a

$$|U_n| \leqslant \omega_p[g_1^{(n)} + \dots + g_{n-p}^{(n)}] + \Omega[g_{n-p+1}^{(n)} + \dots + g_n^{(n)}] \leqslant$$
$$\leqslant \omega_p S_n + \Omega[u_n^{(n)} + u_{n-1}^{(n)} + \dots + u_{n-p+1}^{(n)} - pu_{n-p}^{(n)}] \leqslant$$
$$\leqslant \omega_p S_n + \Omega n[u_n^{(n)} - u_1^{(n)}]\frac{p}{n} \leqslant \omega_p S + \Omega A\frac{p}{n} + \omega_p(S_n - S),$$

si l'on suppose $n[u_n^{(n)} - u_1^{(n)}]$ borné par un nombre A.

Soit alors θ positif arbitraire, prenons p assez grand, pour que $\omega_p S < \dfrac{\theta}{2}$. Puis p étant fixé, n assez grand ($n > \nu$) pour que $\omega_p(S_n - S) + \Omega A\dfrac{p}{n} < \dfrac{\theta}{2}$. Alors on voit que pour $n > \nu + p$, on aura $|U_n| < \theta$, U_n tend bien vers zéro.

Exemple. On pourra satisfaire aux conditions imposées aux $u_t^{(n)}$ en prenant, par exemple

$$u_t^{(n)} = \frac{1}{n} f\left(\frac{t}{n}\right)$$

où $f(x)$ est une fonction $\geqslant 0$, non décroissante et bornée pour $0 < x \leqslant 1$, l'intégrale $\int_0^1 f(x)dx$ étant finie Ici, alors, S sera évi-

demment égal à la valeur de cette intégrale. Par exemple, on pourra prendre

$$u_t^{(n)} = \frac{1}{n}\left(\frac{t}{n}\right)^{\alpha} \qquad \text{pour } \alpha > 0$$

et

$$S = \frac{1}{\alpha + 1}.$$

Ainsi, quand a_n converge en moyenne vers a,

$$\frac{a_1 n^{\alpha} + a_2(n-1)^{\alpha} + \ldots + a_{n-1} 2^{\alpha} + a_n}{n^{\alpha+1}}$$

converge au sens ordinaire vers $\frac{a}{1+\alpha}$ pour $\alpha > 0$.

Quatrième Lemme. *Considérons une série Σu_n qui converge en moyenne arithmétique et soit S, sa somme généralisée. Soit $a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \ldots, a_n^{(n)}$ une suite non décroissante et tendant vers a ($a = \lim_{n\to\infty} a_n^{(n)}$) de nombres $\geqslant 0$; supposons même que la suite des différences premières: $a_2^{(n)} - a_1^{(n)}, \ldots, a_n^{(n)} - a_{n-1}^{(n)}$ soit non décroissante et que $a_n^{(n)} - a_p^{(n)}$ soit aussi petit que l'on veut pour $\frac{p}{n}$ assez grand. Alors la somme $Z_n = u_1 a_n^{(n)} + \ldots + u_{n-1} a_2^{(n)} + u_n a_1^{(n)}$ converge vers $a\,S$ quand n croît.*

Soit $S_n = u_1 + \ldots + u_n$; la somme en moyenne, S, de la série Σu_n est la limite de $\frac{S_1 + \ldots + S_n}{n}$ de sorte que la quantité

$$\varepsilon_n = \frac{S_1 + \ldots + S_n}{n} - S$$

tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$. On voit facilement que

$$u_n = n\,\varepsilon_n - 2(n-1)\,\varepsilon_{n-1} + (n-2)\,\varepsilon_{n-2}, \ldots, u_3 = 3\,\varepsilon_3 - 4\,\varepsilon_2 + \varepsilon_1,$$
$$u_2 = 2\,\varepsilon_2 - 2\,\varepsilon_1, \quad u_1 = \varepsilon_1 + S.$$

Donc:

$$Z_n = u_1 a_n^{(n)} + \ldots + u_n a_1^{(n)} = S\,a_n^{(n)} + Y_n$$

avec:

$$Y_n = \varepsilon_1 (a_n^{(n)} - 2\,a_{n-1}^{(n)} + a_{n-2}^{(n)}) + \varepsilon_2\, 2\,(a_{n-1}^{(n)} - 2\,a_{n-2}^{(n)} + a_{n-3}^{(n)}) + \ldots +$$
$$+ \varepsilon_{n-2}(n-2)(a_3^{(n)} - 2\,a_2^{(n)} + a_1^{(n)}) + \varepsilon_{n-1}(n-1)(a_2^{(n)} - 2\,a_1^{(n)}) + \varepsilon_n n\,a_1^{(n)},$$

où

$$Y_n = \varepsilon_1 h_n^{(n)} + \varepsilon_2 h_{n-1}^{(n)} + \dots + \varepsilon_n h_1^{(n)},$$

Or $h_p^{(n)} = (n-p+1)[(a_p^{(n)} - a_{p-1}^{(n)}) - (a_{p-1}^{(n)} - a_{p-2}^{(n)})]$ est $\geqslant 0$, d'après les hypothèses faites.

En désignant encore par ω_n le plus grand des nombres $|\varepsilon_n|$, $|\varepsilon_{n+1}|, \dots$, par Ω un nombre supérieur à tous les ε_n, on a donc, en supposant d'abord $a_2^{(n)} - a_1^{(n)} \geqslant a_1^{(n)}$,

$$(7) \qquad |Y_n| \leqslant \omega_p [h_1^{(n)} + \dots + h_p^{(n)}] + \Omega [h_{p+1}^{(n)} + \dots + h_n^{(n)}]$$

$$(8) \qquad \leqslant \omega_p a_n^{(n)} + \Omega [a_n^{(n)} - a_p^{(n)} - (n-p)(a_p^{(n)} - a_{p-1}^{(n)})]$$

$$\leqslant \omega_p A + \Omega [a_n^{(n)} - a_p^{(n)}],$$

où A est une borne des $a_n^{(n)}$.

Soit θ positif arbitraire. On peut choisir par hypothèse $\frac{p}{n}$ assez grand: $1 > \frac{p}{n} > K$ pour que $a_n^{(n)} - a_p^{(n)} < \frac{\theta}{2\Omega}$; et p_0 assez grand pour que $\omega_p < \frac{\theta}{2A}$ pour $p < p_0$. Prenons alors $n > \frac{p_0}{K}$; si l'on prend $\frac{p}{n} > K$, on aura $p > p_0$, donc:

$$|Y_n| < \theta \qquad \text{pour } n > \frac{p_0}{K}.$$

Ainsi quand n croît, Y_n tend vers zéro et $a_n^{(n)} S$ tend vers $a S$, donc Z_n tend vers $a S$.

(Quand on n'a pas toujours $a_2^{(n)} - a_1^{(n)} \geqslant a_1^{(n)}$, il suffit de remplacer, dans l'inégalité (7), $h_2^{(n)}$ par $|h_2^{(n)}|$, de modifier l'inégalité (8) en conséquence et de changer la valeur de A pour arriver à la même conclusion).

Exemple. On peut prendre pour les $a_p^{(n)}$ les nombres positifs croissants $a_p^{(n)} = \left(\frac{p}{n}\right)^\beta$ avec β entier positif.

Car $a_n^{(n)} \to 1$, de plus, on a

$$a_1^{(n)} = \left(\frac{1}{n}\right)^\beta < a_2^{(n)} - a_1^{(n)} = \frac{2^\beta - 1}{n^\beta} < \dots < a_p^{(n)} - a_{p-1}^{(n)} =$$

$$= \frac{p^\beta - (p-1)^\beta}{n^\beta} < a_{p+1}^{(n)} - a_{p+1}^{(n)} =$$

$$= \frac{(p+1)^\beta - p^\beta}{n^\beta} < \dots < a_n^{(n)} - a_{n-1}^{(n)} = \frac{1 - (n-1)^\beta}{n^\beta}$$

et enfin

$$a_n^{(n)} - a_p^{(n)} = \left[1 - \left(\frac{p}{n}\right)^\beta\right]$$

est aussi petit que l'on veut pour $\frac{p}{n}$ assez grand.

Ainsi: quand Σu_n converge en moyenne arithmétique,

$$\frac{1}{n^\beta}[u_n + 2^\beta u_{n-1} + \dots + p^\beta u_{n-p+1} + \dots + n^\beta u_1]$$

converge au sens ordinaire, — pour $\beta > 0$, — vers la somme en moyenne de Σu_n. Ce cas particulier de notre Quatrième lemme est en même temps un cas particulier d'une proposition tout à fait différente de ce lemme et due à M. M. Riesz[1]).

Cinquième Lemme. *Soient a_n, b_n deux fonctions asymptotiquement périodiques*[2]) *de n, de période N, $f(x)$ une fonction bornée et intégrable sur* (0, 1) *et soit $I = \int_0^1 f(x)\,dx$. Alors l'expression*

$$\gamma_n = \frac{1}{n}\left[a_n b_1 f\left(\frac{1}{n}\right) + \dots + a_{n-t+1} b_t f\left(\frac{t}{n}\right) + \dots + a_1 b_n f(1)\right]$$

est une fonction asymptotiquement périodique de n, de période N, et qui converge en moyenne vers abI, où a et b sont les limites en moyenne de a_n et b_n.

En effet, on a

$$\gamma_n = \delta_n + \theta_n + \theta'_n,$$

où, avec des notations évidentes dans lesquelles A_n, B_n sont de période N,

$$\delta_n = \frac{1}{n}\left[A_n B_1 f\left(\frac{1}{n}\right) + \dots + A_1 B_n f(1)\right],$$

$$\theta_n = \frac{1}{n}\left[A_n \omega_1 f\left(\frac{1}{n}\right) + \dots + A_1 \omega_n f(1)\right],$$

$$\theta'_n = \frac{1}{n}\left[\varepsilon_n b_1 f\left(\frac{1}{n}\right) + \dots + \varepsilon_1 b_n f(1)\right].$$

---

1) *Une méthode de sommation équivalente à la méthode des moyennes arithmétiques*, C. R. 152, 1911, p. 1651—1654.

2) Voir à la page 22, la définition des fonctions asymptotiquement périodiques.

Or $|f(x)|$, les $|A_n|$ et les $|b_n|$ ont des bornes F, A et R, donc

$$|\theta_n| \leqslant AF \frac{|\omega_1| + \dots + |\omega_n|}{n},$$

$$|\theta'_n| \leqslant RF \frac{|\varepsilon_1| + \dots + |\varepsilon_n|}{n},$$

c'est dire que θ_n et θ'_n convergent vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

Enfin, si $n = t + mN$,

$$N\delta_n = A_{t+N} B_1 \left\{\left[f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{1+N}{n}\right) + f\left(\frac{1+2N}{n}\right) + \dots\right]\frac{N}{n}\right\} +$$
$$+ A_{t+N-1} B_2 \left\{\left[f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left(\frac{2+N}{n}\right) + f\left(\frac{2+2N}{n}\right) + \dots\right]\frac{N}{n}\right\} + \dots +$$
$$+ A_{t+1} B_N \left\{\left[f\left(\frac{N}{n}\right) + f\left(\frac{2N}{n}\right) + f\left(\frac{3N}{n}\right) + \dots\right]\frac{N}{n}\right\} =$$
$$= A_{t+N} B_1 [I + \eta_{t+N}] + A_{t+N-1} B_2 [I + \eta_{t+N-1}] + \dots +$$
$$+ A_{t+1} B_N [I + \eta_{t+1}] = N(u_n + \varphi_n).$$

Au second membre, le nombre de termes est fini, de sorte que

$$\varphi_n = \frac{1}{n}[A_{t+N} B_1 \eta_{t+N} + \dots + A_{t+1} B_N \eta_{t+1}]$$

tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$. D'autre part,

$$u_n = u_{t+mN} = \frac{1}{n}[A_{t+N} B_1 + \dots + A_{t+1} B_N] I$$

ne dépend pas de m. Donc u_n est une fonction de n qui est périodique et de période N. Dès lors

$$\gamma_n = u_n + \varphi_n + \theta_n + \theta'_n$$

est une fonction asymptotiquement périodique de période N. Enfin, la limite en moyenne de γ_n est évidemment égale à celle de u_n. Or

$$\frac{u_1 + \dots + u_{mN}}{mN} = \frac{1}{mN}(u_1 + \dots + u_N)\, m = \frac{u_1 + \dots + u_N}{N} =$$

$$= \frac{1}{N} B_1 [A_{1+N} + A_{2+N} + \dots + A_{2N}] I + \dots + B_N [A_N + \dots + A_1] I =$$

$$= \left[\frac{A_1 + \dots + A_N}{N}\right] \left[\frac{B_1 + \dots + B_N}{N}\right] I = ab\, I.$$

D'où:

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_n = ab\, I.$$

On peut prendre en particulier $f(x) = x^\alpha$ pour $\alpha \geqslant 0$; alors $I = \int_0^1 x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha + 1}$, et on a

$$\lim_{n\to\infty} \text{en moyenne} \left\{\frac{1}{n}\left[a_n b_1 \left(\frac{1}{n}\right)^\alpha + \dots + a_{n-t+1} b_t \left(\frac{t}{n}\right)^\alpha + \dots + a_1 b_n \left(\frac{n}{n}\right)^\alpha\right]\right\} =$$

$$= \frac{ab}{1 + \alpha}.$$

En particulier pour $\alpha = 0$, c'est à dire si $f(x) \equiv 1$, on a la proposition simple suivante:

***Soient** a_n, b_n, **deux fonctions asymptotiquement périodiques de** n, **avec la même période asymptotique** N, **et soient** a, b **les limites en moyenne de** a_n, b_n. **Alors l'expression** $\beta_n = \frac{a_1 b_n + \dots + a_n b_1}{n}$ **est asymptotiquement périodique, de période** N **et converge en moyenne vers** ab.*

Troisième Partie. Comportement asymptotique des solutions des systèmes non homogènes (E)

Expression générale des solutions de (E). Quand on se donne arbitrairement les valeurs initiales $y_j(1) = y_j$, les solutions des système (E) se déterminent de proche en proche. On a

$$y_k(2) = \sum_i a_{ki} y_i + f_k(1),$$

$$y_k(3) = \sum_i a_{ki}^{(2)} y_i + \sum_i a_{ki} f_i(1) + f_k(2)$$

et en général

$$y_k(n) = \sum_i a_{ki}^{(n-1)} y_i + f_k(n-1) +$$
(9)
$$+ \sum_i [a_{ki}^{(n-2)} f_i(1) + \ldots + a_{ki}^{(n-t)} f_i(t-1) + \ldots + a_{ki} f_i(n-2)].$$

C'est cette formule qui va nous permettre d'étudier le comportement de $y_k(n)$. On connait par hypothèse les comportements de $a_{ki}^{(n)}$ et $f_k(n-1)$; la difficulté est donc reportée à l'étude du crochet et c'est évidemment pour celui-ci que nous seront utiles les résultats de la Seconde Partie.

Cas où les seconds membres sont des polynômes en n. Supposons que

$$f_i(n-1) = F_i n^m + F_i^{(1)} n^{m-1} + \ldots + F_i^{(m)}$$

où m est entier positif et où ces $F_i, \ldots, F_i^{(m)}$ sont des constantes données.

Alors (9) devient:

(10)
$$y_i(n) = \sum_k a_{ik}^{(n-1)} y_k + F_i(n-1)^m + \ldots + F_i^{(m)} +$$
$$\sum_k F_k[a_{ik}(n-2)^m + \ldots + a_{ik}^{(n-2)} 1^m] + \sum_k F_k^{(1)} [a_{ik}(n-2)^{m-1} + \ldots] + \ldots$$

Or puisque $a_{ik}^{(n)}$ converge en moyenne vers Π_{ik}, on peut prouver (Troisième Lemme, Exemple p. 10) que

$$\frac{a_{ik}(n-2)^m + \ldots + a_{ik}^{(n-2)} 1^m}{(n-2)^{m+1}}$$

converge au sens ordinaire vers $\dfrac{\Pi_{ik}}{m+1}$.

Par suite en divisant (10) par n^{m+1}, on trouve

(10bis)
$$\lim_{n \to \infty} \frac{y_i(n)}{n^{m+1}} = \frac{1}{m+1} \sum_k \Pi_{ik} F_k = \frac{A_i}{m+1}.$$

Posons alors $y_i(n) = \dfrac{n^{m+1}}{m+1} A_i + z_i(n)$. En portant dans (E), on aura (en tenant compte que, en vertu de (10bis), on a $\sum_k a_{ik} A_k = A_i$),

$$z_i(n) - \sum_k a_{ik} z_k(n-1) = A_i \frac{(n-1)^{m+1} - n^{m+1}}{m+1} + F_i(n-1)^m + \ldots + F_i^{(m)} =$$
(11)
$$= B_i(n-1)^m + B_i^{(1)}(n-1)^{m-1} + \ldots + B_i^{(m)}$$

avec

$$B_i = F_i - A_i \quad \text{d'où} \quad \sum_k \Pi_{ik} B_k = \sum_k \Pi_{ik} F_k - \Sigma \Pi_{ik} A_k = A_i - A_i = 0.$$

On a donc pour les $z_i(n)$ un système de la même nature que pour les $y_i(n)$, mais avec

$$\lim_{n\to\infty} \frac{z_i(n)}{n^{m+1}} = \frac{1}{m+1} \sum_k \Pi_{ik} B_k = 0.$$

Or en retranchant $\sum_k \Pi_{ik} B_k [(n-2)^m + \ldots + 1^m]$ qui est nul, d'une formule écrite pour z_i comme (10) pour y_i, on obtient

$$\frac{z_i(n)}{n^m} = \frac{1}{n^m} \Big[\sum_k a_{ik}^{(n-1)} y_k + B_i (n-1)^m + \ldots + B_i^{(m)} \Big]$$
$$+ \sum_k B_k \Big\{ [a_{ik} - \Pi_{ik}] \left(\frac{n-2}{n}\right)^m + \ldots + [a_{ik}^{(n-2)} - \Pi_{ik}] \left(\frac{1}{n}\right)^m \Big]$$
$$+ \sum_k B_k^{(1)} \Big\{ a_{ik} \left(\frac{n-2}{n}\right)^{m-1} \frac{1}{n} + \ldots + a_{ik}^{(n-1)} \left(\frac{2}{n}\right)^{m-1} \frac{1}{n} \Big\}$$
$$+ \ldots$$

Au second membre, le premier terme tend vers B_i, le troisième terme tend d'après le même Troisième Lemme utilisé plus haut vers $\frac{1}{m} \sum_k \Pi_{ik} B_{ik}^{(1)}$. Le second tend vers $\sum_k B_k s_{ik}$ d'après le Quatrième Lemme (Exemple p. 12). Les autres termes tendent vers zéro. On a donc:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{z_i(n)}{n^m} = B_i + \sum_k s_{ik} B_k + \frac{1}{m} \sum_k \Pi_{ik} B_k^{(1)} = C_i.$$

On posera

$$z_i(n) = C_i n^m + y_{i,m-1}(n)$$

et en portant dans (E):

$$(12) \quad \begin{aligned} & y_{i,m-1}(n) - \sum_k a_{ik} y_{k,m-1}(n-1) = (\sum_k a_{ik} C_k)(n-1)^m - C_i n^m + \\ & + B_i (n-1)^m + \ldots + B_i^{(m)} = D_i (n-1)^{m-1} + \ldots + D_i^{(m-1)}. \end{aligned}$$

Car le coefficient de n^m est,

$$B_i - C_i + \sum_k a_{ik} C_k = -\sum_k s_{ik} B_k - \frac{1}{m} \sum_k \Pi_{ik} B_k^{(1)} + \sum_k a_{ik} B_k +$$
$$+ \sum_j \Big(\sum_k a_{ik} s_{kj} \Big) B_j + \frac{1}{m} \sum_j \Big(\sum_k a_{ik} \Pi_{kj} \Big) B_j^{(1)} =$$
$$= \sum_j \Big\{ a_{ij} - s_{ij} + \sum_k a_{ik} s_{kj} \Big\} B_j = \sum_k \Pi_{ij} B_j = 0.$$

Donc

$$y_i(n) = \frac{n^{m+1}}{m+1} A_i + n^m C_i + y_{i,m-1}(n)$$

où les $y_{i,m-1}(n)$ vérifient un système (E) de même nature que pour les y mais avec un polynôme de degré $m-1$ au second membre. En procédant ainsi de proche en proche, on aura des expressions de la forme

$$y_i(n) = A_i \frac{n^{m+1}}{m+1} + C_i n^m + y_{i,m-1}(n)$$
$$y_{i,m-1}(n) = K_i n^m + K_i' n^{m-1} + y_{i,m-2}(n)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_{i,2}(n) = Q_i n^3 + Q_i' n^2 + y_{i,1}(n)$$
$$y_{i,1}(n) = R_i n^2 + R_i' n + y_{i,0}(n)$$
$$y_{i,0}(n) = n S_i + T_i + \xi_i(n)$$

d'où

$$y_i(n) = H_i n^{m+1} + H_i^{(1)} n^m + \ldots + H_i^{(m)} n + h_i^{(m)} + \xi_i(n)$$

où les H sont des constantes et les $\xi_i(n)$ sont un système de solutions de (H).

D'ailleurs $\xi_i(n) = \sum\limits_j a_{ij}^{(n-1)} \xi_i(1)$ de sorte que $\xi_i(n)$ converge en moyenne vers $\xi_i = \sum\limits_j \Pi_{ij} \xi_i(1)$. Dès lors en vertu du système (H) on a en passant à la limite (en moyenne)

$$\xi_k - \sum_i a_{ik} \xi_i = 0.$$

Ce qui montre, en retranchant de (H) et posant $\varphi_i^{(n)} = \xi_i(n) - \xi_i$, que $\xi_i(n)$ est la somme d'une constante et d'une solution $\varphi_i^{(n)}$ du

système H, cette solution convergeant en moyenne vers zéro. Finalement: *la solution générale des équations (E) est la somme*

$$y_i(n) = H_i n^{m+1} + H_i^{(1)} n^m + \dots + H_i^{(m)} n + H_i^{(m+1)} + \varphi_i^{(n)}$$

d'un polynôme, de degré supérieur au plus d'une unité au plus haut degré des polynômes $f_k(n)$, et d'une fonction $\varphi_i^{(n)}$ convergeant en moyenne vers zéro, les $\varphi_i^{(n)}$ formant un système de solutions des équations homogènes (H) associées à (E).

On peut calculer les coefficients du polynôme. Calculons les deux premiers qui seuls sont utiles dans l'application de M. Mihoc.

On a vu que

$$H_i = \frac{\sum\limits_k \Pi_{ik} F_k}{m+1} \tag{13}$$

D'autre part

$$H_i^{(1)} = C_i + K_i$$

avec $K_i = \frac{1}{m} \sum\limits_k \Pi_{ik} D_k$,

$$D_i = B_i^{(1)} - m \sum_k a_{ik} C_k - m B_i.$$

Or on a vu que $\sum\limits_k a_{ik} C_k = C_i - B_i$. Donc: $D_i = B_i^{(1)} - m\, C_i$ et

$$H_i^{(1)} = C_i + \frac{1}{m} \sum_k \Pi_{ik} [B_k^{(1)} - m C_k].$$

D'autre part

$$C_i = B_i + \sum_k s_{ik} B_k + \frac{1}{m} \sum_k \Pi_{ik} B_k^{(1)},$$

$$\sum_k \Pi_{ik} C_k = \sum_k \Pi_{ik} B_k + \sum_l \Big[\sum_k \Pi_{ik} s_{kl}\Big] B_l + \frac{1}{m} \sum_l \Big[\sum_k \Pi_{ik} \Pi_{kl}\Big] B_l^{(1)}$$

$$= \sum_k \Pi_{ik} B_k + \frac{1}{m} \sum_l \Pi_{il} B_l^{(1)}.$$

Et comme on a vu que $\sum\limits_k \Pi_{ik} B_k = 0$:

$$H_i^{(1)} = B_i + \sum s_{ik} B_k + \frac{1}{m} \sum_k \Pi_{ik} B_k^{(1)}$$

Or $B_i = F_i - A_i$ et $B_i^{(1)} = F_i^{(1)} + \frac{m}{2} A_i - m F_i$. Donc:

$$H_i^{(1)} = F_i + \sum_k s_{ik} F_k - A_i - \sum_k s_{ik} A_k + \frac{1}{m} \sum_k \Pi_{ik} F_k^{(1)} + $$
$$+ \tfrac{1}{2} \sum_k \Pi_{ik} A_k - \sum_k \Pi_{ik} F_k$$

et puisque $A_i = \sum_j \Pi_{ij} F_j$, on voit finalement, en tenant compte des égalités $\sum_k s_{ik} \Pi_{kj} = 0$ et $\Pi_{ij} = \sum_k \Pi_{ik} \Pi_{kj}$ que

$$(14) \qquad H_i^{(1)} = F_i - \tfrac{3}{2} \sum_k \Pi_{ik} F_k + \sum_k s_{ik} F_k + \frac{1}{m} \sum_k \Pi_{ik} F_k^{(1)}.$$

Dans le cas où $\sum_k \Pi_{ik} F_k = 0$, on a donc:

$$y_i(n) = H_i^{(1)} n^m + \dots + H_i^{(m)} + \xi_i(n)$$

avec

$$(15) \qquad H_i^{(1)} = F_i + \sum_k s_{ik} F_k + \frac{1}{m} \sum_k \Pi_{ik} F_k^{(1)}.$$

Cas où les seconds membres $f_k(n)$ sont constants. Lorsque $f_k(n) = F_k =$ constante, on a d'après ce qui précède, pour $m = 0$,

$$(16) \qquad y_i(n) = n \sum_l \Pi_{ij} F_j + F_i - \tfrac{3}{2} \sum_j \Pi_{ij} F_j + \sum_j s_{ij} F_j + \xi_i(n),$$

où les $\xi_i(n)$ vérifient (H).

Il va être utile de chercher toutes les solutions constantes u_k de (H). On aura

$$u_k = u_k(n) = \sum_l a_{kl}^{(n-1)} u_l$$

et en passant à la limite, en moyenne:

$$u_k = \sum_l \Pi_{kl} u_l.$$

Donc, s'il y a des solutions constantes, elles sont de la forme $\sum_l \Pi_{kl} \lambda_l$. Réciproquement on vérifie que les $x_l = \sum_l \Pi_{kl} \lambda_l$ vérifient (H) quels que soient les λ_l. D'ailleurs on a vu que les limites en moyenne ξ_i des $\xi_i(n)$ sont des solutions de (13), c'est à dire de (H). Donc dans (16)

$$-\tfrac{1}{2} \sum_j \Pi_{ij} F_j + \xi_i + \varphi_i^{(n)} = \sum \Pi_{ij} \mu_j + \varphi_i^{(n)},$$

où les μ_j sont arbitraires. Finalement:

$$y_i(n) = n \sum_j \Pi_{ij} F_j + F_i + \sum_j s_{ij} F_j + \sum_j \Pi_{ij} \mu_j + \varphi_i^{(n)}$$

où les μ_j sont des constantes arbitraires et où les $\varphi_i(n)$ forment un système quelconque — convergeant en moyenne vers zéro — de solutions de H.

En particulier, dans le cas semi-régulier, où les Π_{ki} sont indépendants de k, $\sum_i \Pi_{ki}\mu_i$ est un nombre A indépendant de k. Comme ce cas ne se présente (Brno, p. 19) que si $\sum_i a_{ki} = 1$, on voit de plus que A peut être choisi arbitrairement.

Cas où les $f_k(n)$ convergent vers zéro. On a

$$\frac{y_k(n)}{n} = \frac{1}{n} \sum_i a_{ki}^{(n-1)} y_i(1) + \frac{1}{n} f_k(n-1) +$$

$$+ \sum_i \Pi_{ki} \frac{f_i(n-2) + \ldots + f_i(1)}{n-2} \frac{n-2}{n} + \tag{17}$$

$$+ \frac{n-2}{n} \left\{ \frac{1}{n-2} \sum_i [(a_{ki} - \Pi_{ki}) f_k(n-2) + \ldots + (a_{ki}^{(n-2)} - \Pi_{ki}) f_k(1)] \right\}.$$

Au second membre les trois premiers termes tendent vers zéro. L'accolade tend vers $s_{ki} \times 0 = 0$ en vertu du Premier Lemme, p. 7. On a donc:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{y_k(n)}{n} = 0.$$

Mais que peut-on dire sur $y_k(n)$? D'après (17), si on multiplie par n, tous les termes seront convergents sauf peut-être

$$\Pi_{ki}[f_i(n-2) + \ldots + f_i(1)].$$

Pour qu'il y ait une limite de $y_k(n)$, il suffit donc que pour tout i, $\sum_n f_i(n)$ soit une série convergente.

Cas où les $f_k(n)$ sont les termes de séries convergentes. D'après ce qui précède, il est alors clair que les $y_k(n)$ convergent quand n croît.

Nous allons maintenant abandonner le cas borné le plus général pour obtenir des propositions plus précises et utilisables dans l'application au Calcul des Probabilités.

Cas asymptotiquement périodique. En vue des ces applications aux probabilités, examinons le cas où $f_k(n) = n^\alpha A_k(n)$ où $\alpha \geqslant 0$ et où $A_k(n)$ — ainsi que tous les $a_{ki}^{(n)}$ — sont des fonctions »asymptotiquement périodiques« de n de période N. (Rappelons qu'une fonction $g(n)$ est dite ***asymptotiquement périodique,*** de période N, si elle est la somme d'une fonction périodique de n, de période N et d'un infiniment petit avec $\frac{1}{n}$. Et notons qu'une telle fonction est nécessairement bornée quand n varie).

En appliquant alors la formule de résolution (9), on a

$$\frac{y_k(n)}{n^{\alpha+1}} = \frac{1}{n^{\alpha+1}} \sum_i a_{ik}^{(n-1)} y_k(1) + \left[\left(\frac{n-1}{n}\right)^\alpha A_k(n-1)\right] \frac{1}{n} +$$
$$+ \left(\frac{n-2}{n}\right)^{\alpha+1} \sum_i \left\{\left[a_{ki}^{(n-2)} A_i(1) \left(\frac{1}{n-2}\right)^\alpha + \dots + \right.\right.$$
$$\left.\left. + a_{ki} A_i(n-2) \left(\frac{n-2}{n-2}\right)^\alpha\right] \frac{1}{n-2}\right\}.$$

Les deux premiers termes tendent vers zéro avec $\frac{1}{n}$. D'après le Sixième Lemme, l'accolade est une fonction asymptotiquement périodique de n, de période N et elle converge en moyenne vers $\frac{1}{\alpha+1} \Pi_{ki} A_i$, si A_i est la limite en moyenne de $A_i(n)$. Donc

$$y_k(n) = n^{\alpha+1} A'_k(n),$$

où $A'_k(n)$ est une fonction asymptotiquement périodique de n, qui converge en moyenne vers

$$A'_k = \frac{1}{\alpha+1} \sum_i \Pi_{ki} A_i.$$

Cas non oscillant. Dans le cas non oscillant, celui où les $a_{kj}^{(n)}$ convergent au sens ordinaire vers les Π_{kj}, les $\overline{\omega}_{kj}^{(n)}$ de la p. 3 se ré-

duisent aux Π_{kj}, de sorte que la série $\sum_{t=1}^{t=\infty}(a_{kj}^{(n)} - \Pi_{kj})$ devient absolument convergente et elle est majorée par une progression géométrique convergente $\sum_{t=1}^{t=\infty} Tq^n$. D'ailleurs, il en est de même pour tout système, convergeant vers zéro, de solutions $x_j(n)$ de (H). On a, en effet,

$$x_j(n) = \sum_i a_{ji}^{(n-1)} x_i(1),$$

d'où à la limite $0 = \sum_i \Pi_{ij} x_i(1)$ et par suite

$$|x_j(n)| = |\sum_i [a_{ji}^{(n-1)} - \Pi_{ji}] x_i(1)| \leqslant \sum_i |x_i(1)|\, Tq^n = T'q^n.$$

D'après la p. 5, il en sera, par suite, de même de l'expression

$$U_{jk}(n) = \sum_{t=1}^{t=n} (a_{jk}^{(t)}(n) - \Pi_{jk}) - s_{jk}.$$

Cas où les $f_k(n)$ convergent exponentiellement vers zéro. Alors dans le cas non oscillant les solutions $y_k(n)$ convergent exponentiellement vers leurs limites. En effet, en posant

$$\Phi_k = \sum_{n=1}^{n=\infty} f_k(n),$$

on a, d'après ce qui précéde, p. 20:

$$\lim y_k(n) = \sum_i \Pi_{ki} y_i(1) + \sum_i \Pi_{ki} \Phi_i = Y_k,$$

d'où:

$$y_k(n) - Y_k = \sum_i [a_{ki}^{(n)} - \Pi_{ki}] y_i(1) + \sum_i \Pi_{ki} \sum_{t=n+1}^{\infty} f_i(t) + f_k(n-1)$$
$$+ \sum_i \{[a_{ki} - \Pi_{ki}] f_i(n-2) + \ldots + [a_{ki}^{(n-2)} - \Pi_{ki}] f_i(1)\}.$$

Si $|a_{ki}^{(n)} - \Pi_{ki}| < Tq^n$ et $|f_k(n)| \leqslant T'q'^n$, on aura:

$$|y_k(n) - Y_k| \leqslant \left[T \sum_i |y_i(1)|\right] q^n + \left[\sum_i \Pi_{ki} \frac{T'}{1-q'}\right] q'^{n-1} + T'q'^{n-1}$$
$$+ \sum_i TT'[qq'^{n-2} + \ldots + q^{n-2}q']$$
$$\leqslant T''q''^n$$

si q'' est compris entre 1 et les deux nombres q, q', en appelant T'' un nombre convenablement choisi.

Cas plus complexe. Supposons que $f_k(n)$ soit la somme d'un polynôme en n (de degré m) et d'une quantité qui tend exponentiellement vers zéro quond n croît. Alors les $y_i(n)$ sont les sommes de deux systèmes de solutions. Ces systèmes correspondent aux cas où on remplace $f_k(n)$ par son terme polynômial, ou par son terme infiniment petit. D'après ce qui précéde, les $y_i(n)$ sont donc des sommes de polynômes en n et de quantités qui tendent exponentiellement vers zéro. C'est le résultat final qui nous sera utile ainsi que les formules (13), (14) pour appliquer correctement la méthode de Mihoc à la détermination des parties principales des moments d'ordre supérieur.

Über eine Art der Geometrie von Kawaguchi-Hokari

von

St. Gołąb (Kraków)

§ 1. Die von A. Kawaguchi[1]) eingeführte und von S. Hokari[2]) weiter entwickelte Goemetrie, die auf der folgenden Transformationsgruppe

$$(1)\quad \begin{cases} \bar{y}^i = \bar{y}^i(y^1, \dots, y^m) & i=1,\dots,m \\ \bar{x}^\lambda = \bar{x}^\lambda(x^{m+1}, \dots, x^{m+n}; y^1, \dots, y^m) & \lambda=m+1,\dots,m+n \end{cases}$$

gegründet wird, ist eigentlich eine Geometrie der $(m+n)$-dimensionalen Mannigfaltigkeit, die in einer speziellen Untergruppe wurzelt. Nichtdestoweniger stellt sie einen interessanten Fall dar, da — wie es schon gezeigt wurde[3]) — die geometrischen Theorien von Hosokawa, Wundheiler, Hlavatý und Cartan von ihr umgefasst werden. Das Ziel dieser kleinen Note ist zu zeigen, dass in das Schema der Geometrie von Kawaguchi-Hokari auch ein weiterer interessanter Fall einer geometrischen Theorie eingefügt werden kann, einer Theorie, die vor einigen Jahren von T. Y. Thomas[4]) gebildet, nachher von J. A. Schouten und mir[5]) verallgemeinert wurde, und jetzt in einer anderen Form wieder aktuell geworden ist, und zwar in den neuesten physikalischen Untersuchungen von J. Weyssenhoff[6]).

---

[1]) A. Kawaguchi. *The Foundation of the Theory of Displacements II.* Proc. of. the Imp. Acad. X (1934), 45—48.

[2]) S. Hokari. *Über die Übertragungen, die der erweiterten Transformationsgruppe angehören.* Journ. of the Fac. of Sc. Hokkaido Imp. Univ. **3** (1935) 15—26 und **4** (1935) 41—50.

[3]) *l. c.* [2]).

[4]) T. Y. Thomas. *A projective theory of affinely connected manifolds.* Math. Zeitschr. **25** (1926), 723—733.

[5]) J. A. Schouten-St. Gołąb. *Über projektive Übertragungen und Ableitugen.* Math. Zeitschr. **32** (1930), 192—214.

[6]) Die Arbeit von J. Weyssenhoff ist noch nicht im Druck erschienen.

§ 2. Nehmen wir den speziellen Fall der Gruppe (1) in Betracht, indem

(2) $$n = 1$$

gesetzt wird, und modifizieren wir dementsprechend die Bezeichnungen:

(3) $$\begin{cases} x^{\bar{k}} = x^{\bar{k}}(x^k) & (k=1, \ldots n), \\ x^{\bar{0}} = x^{\bar{0}}(x^\lambda) & (\lambda=0, 1, \ldots, n). \end{cases}$$

Es ist klar, dass in dieser Weise ein spezieller Fall der Geometrie von Kawaguchi-Hokari entstanden ist. Wird insbesondere in den Formeln (3):

(4) $$x^{\bar{0}}(x^\lambda) = x^0 - \frac{1}{c(n+1)} \log \Delta\ ^{1)}, \quad \Delta = \left| \frac{\partial x^{\bar{k}}}{\partial x^k} \right|, \quad c \neq 0$$

gesetzt, so bekommen wir eben die Untergruppe, auf der die projektive Differentialgeometie von T. Y. Thomas aufgebaut wurde. Der Thomasschen Geometrie enspricht der Wert $-\frac{1}{n+1}$ der Konstanten c. Durch die Einführung der Konstanten c gewinnen wir eine Verallgemeinerung, die auch den Veblenschen Standpunkt zu umfassen imstande ist[2]) ($c=1$).

§ 3. Dem Beispiele von A. Wundheiler, dessen rheonome Geometrie[3]) einem anderen Spezialfall $m=1$ entspricht, folgend, führen wir den Begriff der ***starken Grössen*** ein. Also z. B. als einen starken kontravarianten Vektor betrachten wir ein Objekt der Mannigfaltigkeit X_{n+1}, dessen n Komponenten bei beliebiger Transformation der Gruppe (3) sich folgendermassen

(5) $$v^{\bar{k}} = A^{\bar{k}}_k \cdot v^k \quad \left(A^{\bar{k}}_k = \frac{\partial x^{\bar{k}}}{\partial x^k} \right),$$

transformieren. Die Definition der starken Grössen von anderer Valenz ist nun selbstverständlich.

---

[1]) J. A. Schouten-St. Gołąb. *Über projektive Übertragungen und Ableitungen.* Math. Zeitschr. **32** (1930) S. 209, Formel (71).

[2]) O. Veblen. *Projective tensors and connections.* Proc. Nat. Ac. Sc. **14** (1928), 154—166.

[3]) A. Wundheiler. *Rheonome Geometrie. Absolute Mechanik.* Prace Mat.-Fiz. **40** (1932), 97—142, § 4.

Es stellt sich z. B. heraus, dass in dem von Schouten und mir betrachteten Falle

$$(6) \qquad v^k \text{ und } w_0$$

starke Grössen darstellen, wenn v^λ, w_μ beliebige Vektoren des X_{n+1}-Raumes sind. Dagegen sind[1]) v^0 und w_i keine starke Grössen. Die Eigenschaft der Stärke von v^i bleibt erhalten auch bei der allgemeinen Gruppe (3), während w_0 nicht mehr ein starker Skalar bei der Gruppe (3) ist. In ähnlicher Weise zeigt es sich, dass im Falle (4), wenn in X_{n+1} ein linearer Zusammenhang mit den Parametern $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$ gegeben ist, Γ^k_{0i} einen starken Affinor darstellt, und weiter, wenn $R_{\omega\mu\lambda}^{\cdots\nu}$ den zugehörigen Krümmungsaffinor bedeutet, $R_{mji}^{\cdots k}$ ein starker Affinor ist. Die letzten Eigenschaften, richtig bei der beschränkten Gruppe (4), können auf die allgemeine Gruppe (3) *nicht* verallgemeinert werden (man kann nur behaupten, dass z. B. Γ^k_{00} ein starker Pseudovektor ist).

§ 4. Setzen wir nun voraus, dass im Raume X_{n+1}, der auf der Gruppe (3) gegründet ist, ein Fundamentaltensor $g_{\lambda\mu}$ (vom Range $n+1$) gegeben ist. Wird

$$(7) \qquad A^0_{\bar{0}} = \tau$$

gesetzt, so ergibt eine leichte Rechnung, dass

$$(8) \qquad g_{\bar{0}\bar{0}} = \tau^2 g_{00}$$

gilt. Man überzeugt sich weiter, dass

$$(9) \qquad \tau \neq 0$$

sein muss, wenn die Transformationen (3) eine Gruppe bilden. Aus (8) und (9) ist es leicht zu ersehen, dass die Ungleichheit

$$(10) \qquad g_{00} > 0$$

einen invarianten Charakter besitzt. Im Folgenden setzen wir voraus, dass (10) erfüllt ist.

Es entsteht die Frage nach der Existenz starker Grössen, die zugleich Komitanten des Fundamentaltensors wären.

---

[1]) J. A. Schouten-St. Gołąb. *Über projektive Übertragungen und Ableitungen.* Math. Zeitschr. **32** (1930), S. 200, die Formeln (21).

Auf Grund des oben gesagten ist

(11) $$g^{ik}$$

sicher ein starker Tensor. Man überzeugt sich ferner, dass

(12) $$p^k = \frac{1}{g_{00}} \left\{ \begin{matrix} k \\ 0\,0 \end{matrix} \right\}$$

ein starker Vektor ist, wenn — wie üblich — mit $\left\{ \begin{matrix} \nu \\ \lambda\mu \end{matrix} \right\}$ das Christoffelsche Symbol der zweiten Art bezeichnet wird. J. Weyssenhoff hat (im Falle $n = 3$) auf Grund von physikalischen Betrachtungen einen weiteren starken Affinor gefunden, nämlich den folgenden:

(13) $$d_i^k = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}} \left[\left\{ \begin{matrix} k \\ 0\,i \end{matrix} \right\} - g_{i0} p^k \right].$$

Endlich haben wir unabhängig (J. Weyssenhoff und ich) den folgenden kovarianten starken Tensor gefunden:

(14) $$e_{ik} = g_{ik} - \frac{g_{i0} \cdot g_{k0}}{g_{00}}.$$

Es ist sehr wahrscheinlich, dass die oben angegebenen ein vollständiges System von starken Grössen darstellen in dem Sinne, dass jede starke Grösse, die eine Komitante des Fundamentaltensors ist, aus diesem System durch algebraische und Differentiationsprozesse abgeleitet werden kann.

§ 5. Im Zusammenhange mit den obigen Betrachtungen erhebt sich die folgende Frage. Es sei (bei der Gruppe (3)) eine starke Grösse gegeben. Ob und wie kann sie mit zusätzlichen Komponenten ergänzt werden, damit eine Grösse im gewöhnlichen Sinne entsteht.

Wenn es sich um starke Vektoren handelt, so sieht der Sachverhalt folgendermassen aus. Einen starken kontravarianten Vektor v^k kann man immer mit einer beliebigen Komponente v^0 zu einem gewöhnlichen Vektor ergänzen[1]). Dagegen muss bei einem kovarianten starken Vektor w_i notwendigerweise $w_0 = 0$ gesetzt

[1]) Selbstverständlich ist diese zusätzliche Komponente kein Skalar. Sie transformiert sich nach einem bestimmten Transformationsgesetz.

werden, damit ein gewöhnlicher Vektor entsteht. In ähnlicher Weise verhält sich die Sache bei den starken kontravarianten bzw. kovarianten Affinoren von Valenz zwei. Eine kleine Komplizierung tritt bei dem starken gemischten Affinor p_l^k auf. Aus der Transformationsgleichung

$$p_{\bar{\lambda}}^{\bar{\nu}} = A_{\nu\bar{\lambda}}^{\bar{\nu}\lambda} p_\lambda^\nu \tag{15}$$

bekommen wir

$$p_{\bar{l}}^{\bar{k}} = A_{\nu\bar{l}}^{\bar{k}\lambda} p_\lambda^\nu = A_{k\bar{l}}^{\bar{k}l} p_l^k + A_{k\bar{l}}^{\bar{k}0} p_0^k, \tag{16}$$

da die weiteren Glieder wegen $A_0^{\bar{k}} = 0$ wegfallen. Da p_l^k nach der Voraussetzung ein starker Affinor ist, so ergibt (16):

$$A_{k\bar{l}}^{\bar{k}0} p_0^k = 0. \tag{17}$$

Die Koeffizienten $A_k^{\bar{k}}$ und $A_{\bar{l}}^0$ können aber beliebig gewählt werden, woraus

$$p_0^k = 0 \tag{18}$$

folgt. Die Bedingung (18) stellt sich also als eine invariante Bedingung heraus. Setzen wir weiter in (15): $\bar{\nu} = \bar{\lambda} = \bar{0}$ und berücksichtigen, dass $A_{\bar{0}}^k = 0$, so bekommen wir

$$p_0^{\bar{0}} = A_{\nu\bar{0}}^{\bar{0}\lambda} p_\lambda^\nu = A_{0\bar{0}}^{\bar{0}0} p_0^0 + A_{k\bar{0}}^{\bar{0}0} p_0^k, \tag{19}$$

was infolge von (18) und $A_{0\bar{0}}^{\bar{0}0} = 1$ zu

$$p_{\bar{0}}^{\bar{0}} = p_0^0 \tag{20}$$

führt, was besagt, dass p_0^0 ein Skalar sein muss Die Beziehung (15) ergibt endlich für $\bar{\lambda} = \bar{k}$, $\bar{\nu} = \bar{0}$:

$$p_{\bar{k}}^{\bar{0}} = \frac{1}{\tau} \left(A_{\bar{k}}^0 p_0^0 + A_{\bar{k}}^k p_k^0\right) + A_{k\bar{k}}^{\bar{0}l} p_l^k, \tag{21}$$

was das Transformationsgesetz für p_k^0 darstellt. Die p_k^0 können in einem Koordinatensystem beliebig gewählt werden.

§ 6. Es entsteht die Frage nach der geometrischen Deutung der starken Grössen. Wir beschränken uns hier auf die Angabe der geometrischen Interpretation der starken kontravarianten Vektoren. Wie oben schon gesagt, bekommt man aus einem in X_{n+1} gegebenen Vektor v^ν automatisch den starken Vektor v^k. Wo liegt der geometrische Grund für diese Tatsache? Nehmen wir durch den Anfang des Vektors v^ν die Hyperfläche $x^0 = \mathrm{Const}$ und projezieren den Vektor v^ν auf diese Hyperfläche längs der Parameterlinien x^0. Die Projektion hat eben die Komponenten v^k. Deuten wir nun die Transformation (3) als Abbildung von Punkten im Raume X_{n+1}. Dann geht v^ν in einen Vektor $\bar{v}^\nu$ über. Die projektion v^k wird dabei in einen Vektor $\bar{v}^k$ übergehen. Die Tatsache, dass v^k ein starker Vektor ist, bedeutet eben, dass $\bar{v}^k$ wieder die Projektion von $\bar{v}^\nu$ sein wird und zwar deswegen, dass — wie leicht zu ersehen ist — die Parameterlinien x^0 bei der Transformation (3) wieder in die Parameterlinien $x^{\bar{0}}$ übergehen, und das Projezieren gerade in der Richtung dieser Parameterlinien stattfindet.

Sur une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une différentielle totale

par

St. Gołąb (Kraków)

§ 1. L'importance de la notion de la différentielle totale due à M. Thomae[1]) à été mise en évidence par MM. Stolz et Fréchet. Nous rappelons la définition. On dit que la fonction

$$f(x_1, ..., x_n) \tag{1}$$

possède au point

$$x_i = \mathring{x}_i \qquad (i=1, ..., n) \tag{2}$$

une différentielle totale, s'il existe n constantes a_i (parfaitement déterminées) telles que pour tous les h_i vérifiant les inégalités

$$|h_i| < \delta \qquad (\delta > 0) \tag{3}$$

subsiste la relation

$$\begin{aligned} f(\mathring{x}_1 + h_1, ..., \mathring{x}_n + h_n) - f(\mathring{x}_1, ..., \mathring{x}_n) = \\ = \sum_{i=1}^{n} a_i h_i + \varrho(h_1, ..., h_n) \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} h_i^2} \end{aligned} \tag{4}$$

avec

$$\operatorname{Lim} \varrho(h_1, ..., h_n) = 0 \quad \text{pour} \quad \sum_{i=1}^{n} h_i^2 \to 0. \tag{5}$$

Il est bien connu que l'existence de la différentielle totale au point (2) entraîne l'existence de toutes les dérivées partielles du premier ordre au point (2). Nous avons en outre dans ce cas là:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{x_i = \mathring{x}_i} = a_i \qquad (i=1, ..., n). \tag{6}$$

---

[1]) D'après l'article de M. Montel inséré dans l'Encyclopédie de Teubner.

Réciproquement, de l'existence des dérivées premières au point (2) on ne peut pas tirer la conclusion de l'existence d'une différentielle totale.

Une condition nécessaire et suffisante a été établie par M. Wilkosz[1]).

Le but de cette Note est de donner une condition nécessaire et suffisante nouvelle (à ma connaissance) pour l'existence de la différentielle totale (la nécessité n'est pas nouvelle). Cette condition n'est pas sans valeur pratique. Dans un travail sur les fonctions homogènes j'aurai l'occasion de donner une application de ma condition.

Le § 2 contient l'énoncé du théorème. La démonstration du théorème principal, qui se trove exposée au § 4, est précédée par le § 3, renfermant deux lemmes intéressants par eux-mêmes. Quelques conséquences immédiates du théorème sont contenues dans le dernier § 5.

§ 2. Etant donnée une fonction (1) possédant au point (2) un) différentiellelle totale et étant donné un système de n fonctions

(7) $$\varphi_i(t) \qquad (i=1, ..., n),$$

telles que

(8) $$\varphi_i(0) = \mathring{x}_i$$

et possédant pour $t = 0$ des dérivées

(9) $$\left(\frac{d\varphi_i}{dt}\right)_{t=0} = \lambda_i,$$

la fonction composée

(10) $$F(t) = f[\varphi_1(t), ..., \varphi_n(t)]$$

possède pour $t = 0$ une dérivée qui s'exprime à l'aide de la formule

(11) $$F'(0) = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \lambda_i .$$

On sait aussi bien que de l'existence des dérivées (6) et (9) on ne peut tirer ni l'existence de $F'(0)$ ni (au cas de l'existence même) la réalisation de la formule (11).

[1]) W. Wilkosz. *Sul concetto del differenziale esatto.* Fund. Math. **2** (1920), 140–144.

Théorème. *La condition nécessaire et suffisante pour que la fonction* (1) *possède au point* (2) *une différentielle totale, consiste en ce que pour chaque système de fonctions* (7) *satisfaisant à* (8) *et* (9)[1], *la fonction composée* (10) *soit dérivable et que sa dérivée s'exprime par la formule*

$$F'(0) = \sum_{i=1}^{n} b_i \cdot \lambda_i, \tag{12}$$

où les b_i sont des constantes indépendantes des fonctions (7) (*On constate a posteriori que $b_i = a_i$*).

Par rapport à ce qu'on a établi plus haut, il suffit de démontrer que la condition énoncée est *suffisante*. Pour ne pas interrompre la marche de la démonstration, nous la faisons précéder par deux lemmes.

§ 3. Lemme 1. *Etant donné dans un plan* (π) *un ensemble de points* (Z), *ayant A comme point d'accumulation, il existe un sousensemble* ($\bar{Z}$) *de* (Z), *ayant aussi A comme point d'accumulation, et une courbe C, tels que C passe par $\bar{Z}$ et que dans un système convenable de coordonnées rectangulaires* (x, y), *l'équation de C puisse être écrite sous la forme*

$$y = f(x), \tag{13}$$

où $f(x)$ est continue avec sa dérivée première $f'(x)$.

Démonstration. L'ensemble des rayons $\overrightarrow{AM}$, où M est le point courant de (Z), possède en raison de son caractère de compacité un rayon $\overrightarrow{r}$ d'accumulation au moins. Nous mettons l'origine des coordonnées au point A et l'axe des x sur $\overrightarrow{r}$. L'axe des y sera orientée de façon que dans le premier quart du plan il se trouve une infinité de points de l'ensemble (Z). Nous choisissons arbitrairement un de ces points et nous le désignons par P_1. Par R_1 désignons

[1]) Nous démontrons en réalité un théorème plus fort dans un sens, à savoir que nous supposons que la formule (11) subsiste seulement pour les systèmes formés par des fonctions (7) pourvues de dérivées $\varphi_i'(t)$ continues. Le problème reste ouvert dans le cas où nous imposons une autre restriction aux fonctions $\varphi_i(t)$, par exemple celle qu'elles soient analytiques.

la projection de P_1 sur l'axe des x. Dans le triangle AP_1R_1, nous choisissons un nouveau point de (Z) (il y en a une infinité) en le désignant par P_2. Par R_2 nous désignons l'intersection de la droite P_1P_2 avec l'axe des x, et dans le triangle AP_2R_2 nous choisissons de nouveau un point de (Z) en le désignant par P_3. Nous désignons en général par R_ν l'intersection de la droite $P_{\nu-1}P_\nu$ avec l'axe x, et par $P_{\nu+1}$ un des points de l'ensemble (Z) situés dans le triangle $AP_\nu R_\nu$. En progressant d'une telle manière, nous respectons seulement le postulat que la distance de P_ν à A tende vers zéro et que le rayon $\overrightarrow{AP_\nu}$ tende pour $\nu \to \infty$ vers l'axe x. Ainsi nous obtenons une suite infinie de points P_ν, qui constitueront l'ensemble $(\bar{Z})$. Remarquons que la ligne brisée menée par les points $P_1, P_2, P_3, \ldots$ est convexe. A chaque point $P_\nu (\nu \geqslant 2)$ nous attribuons maintenant une direction parfaitement déterminée, à savoir la direction du vecteur $\overrightarrow{P_{\nu-1}P_{\nu+1}}$ (au point P_1 nous attribuons la direction du vecteur $\overrightarrow{P_1P_2}$). Nous désignons dans la suite par $W_\nu(x)$ l'unique polynôme du troisième degré, l'image duquel $y = W_\nu(x)$ passe par les points P_ν, $P_{\nu+1}$ et possède en outre aux points extrêmes P_ν. $P_{\nu+1}$ des tangentes avec les directions prescrites[1]). La fonction demandée $f(x)$ soit maintenant définie comme il suit:

$$(14) \qquad \begin{cases} f(x) = W_\nu(x) & \text{pour} \quad x_{\nu+1} \leqslant x \leqslant x_\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots), \\ f(0) = 0, \end{cases}$$

où x_ν est l'abscisse du point P_ν.

La fonction $f(x)$ définie dans l'intervalle $[0, x_1]$ possède dans tout l'intervalle fermé une dérivée première continue, la continuité de cette dérivée au point $x = 0$ résultant de l'inégalité $|P'(x)| \leqslant 25 N$ de la page 96 du travail cité de M. Wilkosz. Notre lemme se trouve ainsi démontré.

Lemme 2. *Soit donné dans l'espace euclidien à n dimensions R_n un ensemble (Z) de points ayant P_0 comme point d'accumulation. Il existe alors une suite infinie de points, R^ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$,*

---

[1]) *Cf.* W. Wilkosz. *Sur l'intégrale fondamentale de l'équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre.* Ann. Soc. Pol. Math. **10** (1931), 94—106, § 2.

appartenant à (Z), ayant P_0 comme point d'accumulation et il existe une courbe C d'équations

(15) $$x_i = x_i(t) \qquad [0 \leqslant t \leqslant \delta],$$

et possédant les propriétés suivantes:

(16)
1) $x_i(0) = \mathring{x}_i$ *sont les coordonnées du point* P_0,
2) *les fonctions* $x_i(t)$ *ont des dérivées premières continues dans l'intervalle fermé* $[0, \delta]$,
3) *on a* $\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 > 0$ *dans tout l'intervalle* $[0, \delta]$,
4) *chaque point* R^ν *appartient à la courbe* C.

Démonstration. M étant un point arbitraire de l'ensemble (Z) différent de P_0, l'ensemble des rayons $\overrightarrow{P_0M}$ possède un rayon d'accumulation au moins. Prenons ce rayon comme axe des ξ_1 d'un nouveau système des coordonnées. Nous choisissons arbitrairement les autres axes $\xi_2, \ldots, \xi_n$ pourvu que le système $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ résulte orthogonal. L'orientation des axes $\xi_2, \ldots, \xi_n$ sera prescrite par certaines conditions dérivées de l'application du lemme 1. La transformation du repère (ξ) sur (x) aura la forme:

(17) $$x_i = \mathring{x}_i + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, \xi_k \qquad (i=1, \ldots, n),$$

où la matrice

(18) $$\|a_{ik}\|$$

est une matrice orthogonale.

Nous tirons de l'ensemble (Z) une suite dénombrable de points P^ν telle que $P^\nu \to P_0$ et qu'en même temps le rayon $\overrightarrow{P_0P^\nu}$ tende vers l'axe des ξ_1. Nous désignons par Q_2^ν la projection du point P^ν sur le plan des axes (ξ_1, ξ_2). Il est facile de démontrer que l'ensemble des rayons $\overrightarrow{P_0Q_2^\nu}$ a (pour une orientation convenable de l'axe ξ_2) l'axe ξ_1 pour position limite. Donc, d'après le lemme 1, on peut tirer de Q_2^ν une suite partielle $\bar{Q}_2^\nu$ telle que $\bar{Q}_2^\nu$ soit situé sur la courbe $\xi_2 = f_2(\xi_1)$, où $f_2(\xi_1)$ possède une dérivée première continue. La suite partielle de P^ν relative à $\bar{Q}_2^\nu$ soit désignée par P_2^ν.

Nous désignons ensuite par Q_3^ν la projection du point P_2^ν sur le plan (ξ_1, ξ_3). L'ensemble des rayons $\overrightarrow{P_0 Q_3^\nu}$ aura de nouveau l'axe ξ_1 comme position limite et, en appliquant le lemme 1, nous tirons de Q_3^ν une suite partielle $\bar{Q}_3^\nu$ telle que $\bar{Q}_3^\nu$ soit située sur la courbe $\xi_3 = f_3(\xi_1)$, où $f_3(\xi_1)$ est pourvue d'une dérivée première continue. Nous désignons par P_3^ν la suite partielle de P_2^ν correspondante à $\bar{Q}_3^\nu$ et, en progressant d'une telle façon, nous obtenons finalement une suite partielle R^ν contenue dans P^ν ayant la propriété que la projection de R^ν sur le plan (ξ_1, ξ_j) est située sur une courbe d'équation

$$\xi_j = f_j(\xi_1) \qquad (j=2, ..., n), \tag{19}$$

où $f_j(\xi_1)$ possèdent des dérivées premières continues dans l'intervalle fermé $[0, \delta]\,(\delta > 0)$ et où

$$f_j(0) = 0 \qquad (j=2, ..., n). \tag{20}$$

ζ^ν étant la première abscisse du point R^ν dans le système $(\xi_1, ..., \xi_n)$, toutes les coordonnées de R^ν seront

$$R^\nu(\zeta^\nu, f_2(\zeta^\nu), ..., f_n(\zeta^\nu)). \tag{21}$$

La courbe C, sur laquelle sont situés tous les points R^ν, est définie dans le système $(\xi_1, ..., \xi_n)$ par les équations:

$$\xi_1 = t, \quad \xi_j = f_j(t), \quad j = 2, ..., n, \ [0 \leqslant t \leqslant \delta]; \tag{22}$$

dans le système primitif $(x_1, ..., x_n)$, ses équations seront

$$x_i = x_i + \alpha_{i1} \cdot t + \sum_{j=2}^{n} \alpha_{ij} \cdot f_j(t). \tag{23}$$

Donc nous avons:

$$\frac{dx_i}{dt} = \alpha_{i1} + \sum_{j=2}^{n} \alpha_{ij} \frac{df_j}{dt} \tag{24}$$

et en vertu de l'orthogonalité de la matrice (18), on a

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{d\xi_i}{dt}\right)^2 \tag{25}$$

donc, d'après $\frac{d\xi_1}{dt}=1$:

(26) $$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 \geqslant 1 > 0$$

dans tout l'intervalle $[0, \delta]$. c. q. f. d.

§ 4. Nous revenons à la démonstration de notre théorème[1]). Nous montrerons tout d'abord que la fonction (1) possède au point (2) des dérivées partielles du premier ordre par rapport à chacune des variables et que les relations suivantes:

(27) $$b_i = a_i \qquad (i=1, \ldots, n)$$

ont lieu. En effet, si nous posons

(28) $$\varphi_i(t) = \mathring{x}_i + \lambda_i t,$$

alors (8) et (9) sont vérifiés. Pour

(29) $$\lambda_j = 1, \quad \lambda_i = 0 \quad \text{pour} \quad i \neq j \ (j \text{ fixe}),$$

la fonction $F(t)$ prend la forme

(30) $$F(t) = f[\mathring{x}_1, \ldots, \mathring{x}_{j-1}, \ \mathring{x}_j + t, \ \mathring{x}_{j+1}, \ldots, \mathring{x}_n]$$

et un calcul facile nous montre que

(31) $$F'(0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)_{x_i=\mathring{x}_i} = a_j.$$

D'autre part, nous avons par hypothèse

(32) $$F'(0) = \sum_{i=1}^{n} b_i \cdot \lambda_i = b_j \lambda_j = b_j,$$

donc

(33) $$b_j = a_j.$$

Nous présenterons la démonstration de notre théorème sous sa forme *indirecte*. Nous supposons pour le moment que la fonction (1) est dépourvue de différentielle totale au point (2). Cela

---

[1]) La méthode primitive de démonstration a été modifiée après une conversation avec M. Ważewski.

signifie qu'il existe un nombre positif $\varepsilon > 0$ et un système de valeurs

$$h_1^\nu, \ldots, h_n^\nu \qquad \nu = 1, 2, \ldots \tag{34}$$

tels que

$$\sum_{i=1}^{n} (h_i^\nu)^2 \to 0 \qquad \text{pour} \quad \nu \to \infty \tag{35}$$

et que la relation

$$\begin{aligned} f[\mathring{x}_1 + h_1^\nu, \ldots, \mathring{x}_n + h_n^\nu] - f[\mathring{x}_1, \ldots, \mathring{x}_n] = \\ = \sum_{i=1}^{n} a_i h_i^\nu + \varrho(h_1^\nu, \ldots, h_n^\nu) \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (h_i^\nu)^2} \end{aligned} \tag{36}$$

ait lieu simultanément avec

$$|\varrho(h_1^\nu, \ldots, h_n^\nu)| \geqslant \varepsilon \qquad (\nu = 1, 2, \ldots). \tag{37}$$

Nous désignons par (Z) l'ensemble des points P^ν de coordonnées

$$(\mathring{x}_1 + h_1^\nu, \ldots, \mathring{x}_n + h_n^\nu). \tag{38}$$

D'après l'inégalité (37), on a

$$\sum_{i=1}^{n} (h_i^\nu)^2 > 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots), \tag{39}$$

d'où, en raison de (35), il s'ensuit que $P_0(\mathring{x}_1, \ldots, \mathring{x}_n)$ est le point d'accumulation de l'ensemble (Z). Appliquons maintenant le lemme 2. Nous obtenons alors une suite partielle de points R^ν situés sur une courbe

$$x_i = x_i(t) \qquad (0 \leqslant t \leqslant \delta), \tag{40}$$

où les propriétés 1) — 4) du N⁰ (16) sont réalisées. Désignons par t^ν la valeur du paramètre t qui correspond au point R^ν. Comme $R^\nu \in Z$, nous avons

$$\begin{aligned} f[x_1(t^\nu), \ldots, x_n(t^\nu)] - f[\mathring{x}_1, \ldots, \mathring{x}_n] = \sum_{i=1}^{n} a_i [x_i(t^\nu) - \mathring{x}_i] + \\ + \varrho[x_1(t^\nu) - \mathring{x}_1, \ldots, x_n(t^\nu) - \mathring{x}_n] \sqrt{\sum_{i=1}^{n} [x_i(t^\nu) - \mathring{x}_i]^2}, \end{aligned} \tag{41}$$

où

(42) $$|\varrho[x_1(t^\nu)-\mathring{x}_1, \dots, x_n(t^\nu)-\mathring{x}_n]| \geqslant \varepsilon \qquad (\nu=1,2,\dots).$$

Construisons maintenant la fonction

(43) $$F(t)=f[x_1(t), \dots, x_n(t)].$$

De l'hypothèse du théorème et des propriétés des fonctions $x_i(t)$ on déduit

(44) $$F'(0)=\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \frac{dx_i(0)}{dt}.$$

Mais

(45) $$F'(0)=\operatorname*{Lim}_{t\to 0+0} \frac{f[x_1(t), \dots, x_n(t)]-f[x_1(0), \dots, x_n(0)]}{t}$$

d'où résulte en particulier

(46) $$\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{dx_i(0)}{dt} = \operatorname*{Lim}_{\nu\to\infty} \frac{f[x_1(t^\nu), \dots, x_n(t^\nu)]-f[x_1(0), \dots, x_n(0)]}{t^\nu}.$$

En divisant les deux membres de l'égalité (41) par t^ν et en tenant compte de $x_i(0)=\mathring{x}_i$ et de $t^\nu > 0$, nous obtenons

(47) $$\frac{f[x_1(t^\nu), \dots, x_n(t^\nu)]-f[x_1(0), \dots, x_n(0)]}{t^\nu} = \\ = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{x_i(t^\nu)-x_i(0)}{t^\nu} + \varrho \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i(t^\nu)-x_i(0)}{t^\nu}\right)^2}.$$

(46) et (47) donnent

(48) $$\varrho[x_1(t^\nu)-\mathring{x}_1, \dots, x_n(t^\nu)-\mathring{x}_n] \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left[\frac{x_i(t^\nu)-x_i(0)}{t^\nu}\right]^2} \to 0 \text{ pour } \nu\to\infty,$$

ce qui, avec $\sum\limits_{i=1}^{n} \left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 \geqslant 1$, conduit à la conclusion

(49) $$\varrho\{x_1(t^\nu)-\mathring{x}_1, \dots, x_n(t^\nu)-\mathring{x}_n\} \to 0 \quad \text{pour} \quad \nu\to\infty,$$

conclusion évidemment contradictoire avec l'inégalité (42). Notre théorème est ainsi démontré.

§ 5. A titre d'application, nous citons ci-dessous quatre théorèmes. Leurs démonstrations directes (à l'exception de celle du premier) sont plus longues que celles auxquelles on est amené en faisant usage de la condition précedente.

Théorèmes 1, 2, 3. Si chacune des fonctions $f(x_1, \ldots, x_n)$, $g(x_1, \ldots, x_n)$ possède au point $(\mathring{x}_1, \ldots, \mathring{x}_n)$ une différentielle totale, alors les fonctions $f+g$, $f \cdot g$ et (au cas où $g(\mathring{x}_1, \ldots, \mathring{x}_n) \neq 0$) $\frac{f}{g}$ en possèdent aussi.

Théorème 4. Si la fonction $f(x_1, \ldots, x_n)$ possède au point $(\mathring{x}_1, \ldots, \mathring{x}_n)$ une différentielle totale, si chacune des fonctions $\varphi_i(y_1, \ldots, y_m)$ $(i=1, \ldots, n)$ possède au point $(\mathring{y}_1, \ldots, \mathring{y}_m)$ une différentielle totale et si en outre $\varphi_i(\mathring{y}_1, \ldots, \mathring{y}_m) = \mathring{x}_i$, alors la fonction composée $F(y_1, \ldots, y_m) = f[\varphi_i(y_1, \ldots, y_m), \ldots, \varphi_n(y_1, \ldots, y_m)]$ possède aussi au point $(\mathring{y}_1, \ldots, \mathring{y}_m)$ une différentielle totale [1]).

Les théorèmes mentionnés ci-dessus sont importants parce qu'ils montrent que les opérations rationnelles avec l'opération de la composition des fonctions forment un groupe par rapport au corps des fonctions pourvues de différentielles totales.

---

[1]) Pour la démonstration directe du théorème 4, voir p. ex. C. Carathéodory. *Vorlesungen über relle Funktionen* (1918), § 561, p. 646—648.

Généralisation de certaines fonctions d'ensemble

par

F. Leja (Kraków)

1. Soit E un ensemble fermé et borné de points du plan contenant une infinité des points et $p_0, p_1, \ldots, p_n$ un système de $n+1$ points différents de E qui seront désignés aussi par une seule lettre

(1) $$p = \{p_0, p_1, \ldots, p_n\}.$$

Désignons par $|p_j p_k|$ la distance cartésienne des points p_j et p_k et formons les sommes

(2) $$l(p) = \sum_{0 \leq j < k \leq n} \log \frac{1}{|p_j p_k|},$$
$$\lambda_j(p) = \sum_{\substack{k=0 \\ (k \neq j)}}^{n} \log \frac{1}{|p_j p_k|} \qquad \text{pour } j = 0, 1, \ldots, n.$$

Lorsque les points (1) varient dans l'ensemble E, les sommes (2) restent inférieurement bornées. Posons

(3) $$l_n = \underset{(p \in E)}{\text{borne inf}} \frac{2}{n(n+1)} l(p),$$
$$\lambda_n = \underset{(p \in E)}{\text{borne inf}} \{\max_{(j)} \frac{1}{n} \lambda_j(p)\}$$

et faisons varier l'indice n. On démontre[1]) que les suites $\{l_n\}$ et $\{\lambda_n\}$ tendent toujours vers une même limite qui sera désignée par $l(E)$

(4) $$\lim l_n = \lim \lambda_n = l(E).$$

La fonction d'ensemble définie par cette formule joue un rôle important dans l'analyse; elle est égale au logarithme négatif du

[1]) M. Fekete: Math. Zschr., t. 17 (1923), p. 228—249 et F. Leja: Bulletin de l'Acad. Polon., Sc. mathém., Cracovie 1933, p. 281—289.

diamètre transfini plan de l'ensemble E. Nous verrons plus loin que l'existence et l'égalité des limites (4) découle d'un principe général et très simple.

Supposons que dans les formules (2) le symbole $|p_j p_k|$ désigne l'aire du triangle de sommets 0, p_j et p_k, où 0 est un point fixe, par exemple l'origine des coordonnées. Dans cette hypothèse, les formules (3) définissent deux nouvelles suites tendant aussi vers une même limite[1]) qui sera désignée par $t(E)$. Cette limite représente une nouvelle fonction d'ensemble[2]) qui joue un rôle dans la théorie des séries de polynômes homogènes de deux variables.

2. Supposons maintenant que E soit un ensemble fermé et borné de points de l'espace à 3 dimensions et que $|p_j p_k|$ désigne la distance cartésienne des points p_j et p_k de cet espace. Formons les sommes

$$d(p) = \sum_{0 \leq j < k \leq n} \frac{1}{|p_j p_k|},$$

$$\delta_j(p) = \sum_{\substack{k=0 \\ (k \neq j)}}^{n} \frac{1}{|p_j p_k|}, \qquad \text{pour } j = 0, 1, \ldots, n,$$

et observons qu'elles restent inférieurement bornées lorsque les points (1) parcourent l'ensemble E. Par conséquent, les formules

$$d_n = \underset{(p \in E)}{\text{borne inf}} \frac{2}{n(n+1)} d(p),$$

$$\delta_n = \underset{(p \in E)}{\text{borne inf}} \{\max_{(j)} \frac{1}{n} \delta_j(p)\}$$

définissent deux suites $\{d_n\}$ et $\{\delta_n\}$ intimement liées à l'ensemble E et on démontre[3]) que ces suites tendent toujours vers une même limite non négative

$$\lim d_n = \lim \delta_n = d(E) \tag{5}$$

dont l'inverse est égal au *diamètre transfini* spatial de l'ensemble E.

---

[1]) F. Leja: Bulletin de l'Acad. Polon., Sc. mathém., Cracovie 1933, p. 453—461.

[2]) $t(E)$ est égal au logarithme négatif de *l'écart transfini* de l'ensemble E par rapport au point 0.

[3]) G. Pólya et G. Szegö: Journ. für Math., t. 165 (1931), p. 4—49. L'existence et l'égalité des limites (4) et (5) résulte d'une proposition générale qui sera démontrée plus loin.

3. Les méthodes de construction des fonctions d'ensembles $l(E)$, $t(E)$ et $d(E)$ ne sont que des cas particuliers de la méthode générale que voici:

Désignons par R un espace métrique quelconque, par $p, q, \ldots$ des points de cet espace et soit

$$\sigma(p, q)$$

une fonction réelle définie et continue pour chaque couple de points différents p et q. Supposons que cette fonction remplisse la condition de symétrie

$$\sigma(p, q) = \sigma(q, p) \tag{6}$$

et qu'elle tende vers une limite finie

$$\lim_{p \to p_0,\; q \to p_0} \sigma(p, q) \tag{7}$$

ou vers *l'infini positif* lorsque les points p et q tendent en même temps vers un même point p_0 de l'espace R[1]).

Soit E un ensemble infini compact[2]) de points de l'espace R et

$$p_0, p_1, \ldots, p_n \tag{8}$$

un système de $n+1$ points quelconques de E. Formons les sommes

$$V(p_0, p_1, \ldots, p_n) = \sum_{0 \leq j < k \leq n} \sigma(p_j p_k) \tag{9}$$

$$U_j(p_0, p_1, \ldots, p_n) = \sum_{\substack{k=0 \\ (k \neq j)}}^{n} \sigma(p_j p_k), \qquad j = 0, 1, \ldots, n, \tag{10}$$

---

[1]) Telles sont, par exemple, les fonctions

$$|pq|^\alpha, \quad \frac{1}{|pq|^\alpha}, \quad \log \frac{1}{|pq|}$$

où $|pq|$ désigne la distance des points p et q de l'espace R et α est un nombre positif.

[2]) C'est-à-dire tel que chaque suite infinie de points de E possède au moins un point d'accumulation appartenant à E.

et observons que ces fonctions des points (8) restent inférieurement bornées lorsque les points (8) varient arbitrairement dans l'ensemble E. Posons

(11) $$V_n = \underset{(p \in E)}{\text{borne inf}}\, V(p_0, p_1, \ldots, p_n),$$

(12) $$U_n = \underset{(p \in E)}{\text{borne inf}} \{\underset{(j)}{\max}\, U_j(p_0, p_1, \ldots, p_n)\}$$

et faisons varier n. Je dis que:

Quel que soit E, les deux suites

$$v_n = \frac{2}{n(n+1)} V_n, \qquad n=1, 2, \ldots,$$

$$u_n = \frac{1}{n} U_n, \qquad n=1, 2, \ldots,$$

tendent vers une même limite finie

(13) $$\lim v_n = \lim u_n = v(E)$$

ou vers l'infini positif.

Démonstration. Soit n un nombre naturel fixe. L'ensemble E étant compact, il existe dans E un système de $n+1$ points

$$q_0, q_1, \ldots, q_n$$

tels qu'on ait

$$V_n = V(q_0, q_1, \ldots, q_n).$$

D'autre part, la condition (6) et les formules (9) et (10) entraînent les identités suivantes

$$V(q_0, q_1, \ldots, q_n) = U_j(q_0, \ldots, q_n) + V(q_0, \ldots, q_{j-1}, q_{j+1}, \ldots, q_n)$$

et

$$\sum_{j=0}^{n} U_j(q_0, \ldots, q_n) = 2V(q_0, \ldots, q_n),$$

donc, comme d'après (11)

$$V(q_0, \ldots, q_{j-1}, q_{j+1}, \ldots, q_n) \geqq V_{n-1} \quad \text{pour } j=0, 1, \ldots, n,$$

on a

(14) $$V_n \geqq U_j(q_0, \ldots, q_n) + V_{n-1} \quad \text{pour } j=0, 1, \ldots, n,$$

d'où l'on conclut que

$$(n+1)V_n \geqq 2V_n + (n+1)V_{n-1}$$

et par suite

$$\frac{2}{n(n+1)}V_n \geqq \frac{2}{n(n+1)}V_{n-1}.$$

La suite $\{v_n\}$ est donc monotone et, par suite, elle tend vers une limite finie ou vers l'infini positif[1]).

Je dis maintenant que la suite $\{U_n\}$ définie par la formule (12) jouit de la propriété suivante: Quels que soient les indices μ et $\nu = 1, 2, \ldots$, on a

$$U_{\mu+\nu} \geqq U_\mu + U_\nu.$$

En effet, l'ensemble E étant compact, la borne (12) est atteinte dans E, c'est-à-dire à l'indice $n = \mu + \nu$ on peut faire correspondre un système de $\mu + \nu + 1$ points de E,

(15) $$q_0, \ldots, q_\mu, q_{\mu+1}, \ldots, q_{\mu+\nu},$$

tels qu'on ait

(16) $$U_{\mu+\nu} = \max_{(j)} U_j(q_0, \ldots, q_{\mu+\nu}).$$

Soient

$$q_{j_1}, q_{j_2}, \ldots, q_{j_\nu}$$

ν points quelconques de la suite (15). Lorsque ces points parcourent la suite (15) de manière que leur nombre reste fixe, l'expression $V(q_{j_1}, \ldots, q_{j_\nu})$ atteint un minimum. En changeant convenablement les indices des points (15), on peut toujours être conduit au cas où ce minimum est égal à $V(q_{\mu+1}, \ldots, q_{\mu+\nu})$. On a donc $V(q_{j_1}, \ldots, q_{j_\nu}) \geqq V(q_{\mu+1}, \ldots, q_{\mu+\nu})$ et, en particulier,

(17) $$V(q_i, q_{\mu+1}, \ldots, q_{k-1}, q_{k+1}, \ldots, q_{\mu+\nu}) \geqq V(q_{\mu+1}, \ldots, q_{\mu+\nu})$$

pour

$$i = 0, 1, \ldots \mu \quad \text{et} \quad k = \mu + 1, \ldots, \mu + \nu.$$

---

[1]) La méthode ci-dessus pour établir l'existence de la limite: $\lim v_n$ ne diffère pas essentiellement de celle dont s'est servi M. Fekete dans son travail cité dans la remarque 1 pour établir l'existence du diamètre transfini d'un ensemble plan.

Mais on a identiquement

$$V(q_i, q_{\mu+1} \dots q_{k-1}, q_{k+1} \dots q_{\mu+\nu}) =$$
$$= U_i(q_i, q_{\mu+1} \dots q_{k-1}, q_{k+1} \dots q_{\mu+\nu}) + V(q_{\mu+1} \dots q_{k-1}, q_{k+1} \dots q_{\mu+\nu})$$

et

$$V(q_{\mu+1}, \dots, q_{\mu+\nu}) = U_k(q_{\mu+1}, \dots, q_{\mu+\nu}) + V(q_{\mu+1} \dots q_{k-1}, q_{k+1} \dots q_{\mu+\nu})$$

et par suite l'inégalité (17) entraîne la suivante

$$U_i(q_i, q_{\mu+1} \dots q_{k-1}, q_{k+1} \dots q_{\mu+\nu}) \geqq U_k(q_{\mu+1}, \dots, q_{\mu+\nu}).$$

Ajoutons aux deux membres de cette inégalité le terme $\sigma(q_i, q_k) = \sigma(q_k, q_i)$. On en déduira l'inégalité

$$U_i(q_i, q_{\mu+1} \dots q_{\mu+\nu}) \geqq U_k(q_i, q_{\mu+1} \dots q_{\mu+\nu}),$$

ayant lieu pour

$$i = 0, 1, \dots, \mu \quad \text{et} \quad k = \mu + 1, \dots, \mu + \nu,$$

d'où l'on conclut d'après (12) qu'on a

$$(18) \qquad U_i(q_i, q_{\mu+1} \dots q_{\mu+\nu}) \geqq U_\nu \quad \text{pour } i = 0, 1, \dots, \mu.$$

Considérons maintenant les $\mu+1$ points initiaux de la suite (15), formons les expressions $U_j(q_0, \dots, q_\mu)$ pour $j = 0, 1, \dots, \mu$ et soit i la valeur de l'indice j pour laquelle

$$\max_{(j)} U_j(q_0, \dots, q_\mu) = U_i(q_0, \dots, q_\mu).$$

D'après (12) on a donc

$$(19) \qquad U_i(q_0, \dots, q_\mu) \geqq U_\mu.$$

Mais, quels que soient les points (15), on a identiquement

$$U_i(q_0, \dots, q_{\mu+\nu}) = U_i(q_0, \dots, q_\mu) + U_i(q_i, q_{\mu+1}, \dots, q_{\mu+\nu})$$

donc, comme d'après (16) $U_{\mu+\nu} \geqq U_i(q_0, \dots, q_{\mu+\nu})$, on a, d'après (18) et (19),

$$U_{u+\nu} \geqq U_\mu + U_\nu \qquad \text{pour } \mu \text{ et } \nu = 1, 2, \dots$$

Ces inégalités entraînent l'existence de la limite finie ou infinie: $\lim \frac{1}{n} U_n$ en vertu du lemme connu suivant[1]):

Si une suite $\{a_n\}$ à termes réels remplit les conditions: $a_{\mu+\nu} \geqq a_\mu + a_\nu$ pour μ et $\nu = 1, 2, \ldots$, la suite $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ tend vers une limite finie ou vers l'infini positif.

Il reste encore à prouver que les suites $\{v_n\}$ et $\{u_n\}$ tendent vers la même limite. Dans ce but observons que les inégalités (14) entraînent la suivante

$$V_n \geqq \max_{(j)} U_j(q_0, \ldots, q_n) + V_{n-1} \qquad \text{pour } n > 1$$

et qu'on a $V_1 = U_1$, ce qui est facile à vérifier. On en conclut que

$$V_n \geqq U_1 + U_2 + \ldots + U_n$$

et par suite

$$v_n \geqq \frac{u_1 + 2u_2 + \ldots + n u_n}{1 + 2 + \ldots + n}. \tag{20}$$

Je dis que, pour tout n, on a l'inégalité

$$u_n \geqq v_n. \tag{21}$$

En effet, soient $q_0, q_1, \ldots, q_n$ $n+1$ points de E tels qu'on ait

$$U_n = \max_{(j)} U_j(q_0, \ldots, q_n)$$

et par suite

$$U_n \geqq U_j(q_0, \ldots, q_n) \qquad \text{pour } j = 0, 1, \ldots, n,$$

d'où l'on conclut que

$$(n+1)\, U_n \geqq \sum_{j=0}^{n} U_j(q_0, \ldots, q_n) = 2V(q_0, \ldots, q_n) \geqq 2V_n.$$

Cette inégalité prouve qu'on a $u_n \geqq v_n$ donc, comme d'après (20) $\lim v_n \geqq \lim u_n$, on voit que $\lim u_n = \lim v_n$. Le théorème est donc entièrement démontré.

Observons que la fonction d'ensemble $v(E)$ définie par la formule (13) est monotone. Elle remplit la condition

$$v(E) \leqq v(E') \qquad \text{si } E \supset E'$$

1) Bulletin de l'Acad. Polon., Sc. mathém., Cracovie 1936, p. 1—7.

car, si un ensemble E' est contenu dans l'ensemble E, on a évidemment

$$\underset{(p \in E)}{\text{borne inf}}\, V(p_0, \ldots, p_n) \leqq \underset{(p \in E')}{\text{borne inf}}\, V(p_0, \ldots, p_n).$$

4. Soit p un point variable et

(22) $$p_1, p_2, \ldots, p_n$$

un système de n points quelconques fixes. L'équation

(23) $$\sqrt[n]{|pp_1| \cdot |pp_2| \ldots |pp_n|} = \varrho,$$

où $|pp_k|$ désigne la distance cartésienne des points p et p_k, représente dans le plan une courbe fermée dite l e m n i s c a t e de n foyers (22) et de rayon $\varrho > 0$. D'autre part, l'équation

(24) $$\frac{n}{\dfrac{1}{|pp_1|} + \dfrac{1}{|pp_2|} + \ldots + \dfrac{1}{|pp_n|}} = r$$

représente dans l'espace à 3 dimensions une surface fermée qui sera dite l e m n i s c a t o ï d e de foyers (22) et de rayon r.

Considérons dans le plan un ensemble fermé et borné E et posons

(25) $$\varrho_n = \underset{(p_\nu)}{\text{borne sup}} \left\{ \min_{(p \in E)} \frac{1}{n} \log \frac{1}{|pp_1| \ldots |pp_n|} \right\}$$

où l'on suppose que les foyers $p_1, \ldots, p_n$ varient arbitrairement dans le plan. D'autre part, supposons que E soit un ensemble fermé et borné de points de l'espace et posons

(26) $$r_n = \underset{(p_\nu)}{\text{borne sup}} \left\{ \min_{(p \in E)} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{|pp_1|} + \ldots + \frac{1}{|pp_n|} \right) \right\}$$

où les foyers $p_1, \ldots, p_n$ varient arbitrairement dans l'espace [1]).

---

[1]) Il est facile de prouver que les bornes ϱ_n et r_n sont toujours finies. Le nombre $e^{\frac{1}{\varrho_n}}$ est égal au plus petit rayon de toutes les lemniscates (23) contenant l'ensemble E dans leur intérieur ou sur leur frontière. D'autre part, le nombre $\frac{1}{r_n}$ est égal au plus petit rayon de toutes les lemniscatoïdes (24) contenant E.

On démontre[1]) que la suite $\{\varrho_n\}$ tend vers une limite déterminée et que cette limite est égale à la limite (4). D'autre part, on démontre[2]) que la suite $\{r_n\}$ tend vers une limite déterminée, égale à la limite (5). On a donc

$$\begin{aligned} \lim \varrho_n &= l(E), \\ \lim r_n &= d(E). \end{aligned} \tag{27}$$

Nous allons maintenant examiner dans quel sens ces deux résultats peuvent être généralisés.

5. Conservons les notations du paragraphe 3 et formons la somme

$$R(p;p_1,\ldots,p_n)=\sum_{k=1}^{n}\sigma(p,p_k), \tag{28}$$

où $p, p_1, p_2, \ldots, p_n$ sont des points différents quelconques de l'espace R. Soit E un ensemble compact de cet espacè. Lorsque le point p varie dans E, la somme (28) varie et atteint un minimum dépendant des points $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Faisons ensuite varier ces derniers points dans l'espace entier R et posons

$$R_n = \underset{(p_\nu)}{\text{borne sup}}\left\{\min_{(p\in R)}\sum_{k=1}^{n}\sigma(p,p_k)\right\}. \tag{29}$$

Nous supposerons que, quel que soit $n=1,2,\ldots$, la borne R_n soit toujours finie. Je dis que:

Quel que soit l'ensemble E, la suite

$$r_n=\frac{R_n}{n}, \qquad n=1,2,\ldots \tag{30}$$

tend vers une limite finie ou infinie, qui sera désignée par $r(E)$ [3]). *Les fonctions d'ensemble $r(E)$ et $v(E)$ satisfont toujours à l'inégalité*

$$r(E) \geqq v(E). \tag{31}$$

---

[1]) M. Fekete, *loc. cit.*, dans la remarque 1.

[2]) Pólya-Szegö: Journ. für Math., t. 165 (1931), p. 4—49.

[3]) Si la limite $r(E)$ est infinie, on a toujours $r(E)=+\infty$.

Démonstration. Supposons d'abord que, quel que soit n, la borne (29) soit atteinte dans l'espace R et soient μ et ν deux nombres naturels fixes. D'après l'hypothèse qui vient d'être faite, on peut faire correspondre aux nombres μ et ν un système de $\mu+\nu$ points

$$q_1, q_2, \dots, q_\mu, q_{\mu+1}, \dots, q_{\mu+\nu}$$

de l'espace R tels qu'on ait

$$R_\mu = \min_{(q \in E)} R(q; q_1, \dots, q_\mu),$$
$$R_\nu = \min_{(q \in E)} R(q; q_{\mu+1}, \dots, q_{\mu+\nu}).$$

D'après la formule (29), on a

$$R_{\mu+\nu} \geqq \min_{(q \in E)} R(q; q_1, q_2, \dots, q_{\mu+\nu}),$$

donc, comme identiquement

$$R(q; q_1, \dots, q_{\mu+\nu}) = R(q; q_1, \dots, q_\mu) + R(q; q_{\mu+1} \dots q_{\mu+\nu})$$

et

$$\min_{(q \in E)} R(q; q_1, \dots, q_{\mu+\nu}) \geqq \min_{(q \in E)} R(q; q_1, \dots, q_\mu) + \min_{(q \in E)} R(q; q_{\mu+1}, \dots, q_{\mu+\nu}),$$

on voit que

(32) $$R_{\mu+\nu} \geqq R_\mu + R_\nu \qquad \text{pour } \mu \text{ et } \nu = 1, 2, \dots,$$

et ces inégalités prouvent que la limite

(33) $$\lim r_n = r(E)$$

existe dans le cas considéré. Mais les inégalités (32) restent vraies dans le cas général, ce qu'il est facile de prouver, donc la limite (33) existe toujours.

Pour établir l'inégalité (31), considérons un système de $n > 1$ points de l'ensemble E,

$$q_1, q_2, \dots, q_n,$$

tels qu'on ait

$$V_{n-1} = V(q_1, \dots, q_n)$$

et soit q_0 un point de E tel qu'on ait

$$\min_{(p \in E)} R(p; q_1, \dots, q_n) = R(q_0; q_1 \dots q_n)$$

et par suite

$$R_n \geqq R(q_0; q_1, \dots, q_n).$$

Comme

$$R(q_0; q_1, \dots, q_n) = V(q_0, q_1, \dots, q_n) - V(q_1, \dots, q_n) \geqq V_n - V_{n-1},$$

on voit que

$$R_n \geqq V_n - V_{n-1} \qquad \text{pour } n=2,3,\dots,$$

d'où l'on déduit l'inégalité

$$(34) \qquad R_1 + R_2 + \dots + R_n \geqq V_n \qquad \text{pour } n=1,2,\dots,$$

car on a toujours $R_1 \geqq V_1$. Or, il résulte de l'inégalité (34) qu'on a

$$\frac{r_1 + 2r_2 + \dots + nr_n}{1+2+\dots+n} \geqq v_n \qquad \text{pour } n=1,2,\dots,$$

d'où l'on conclut que $\lim r_n \geqq \lim v_n$. Par suite notre théorème est démontré.

Observons que la fonction d'ensemble $r(E)$ définie par la formule (33) est monotone et qu'elle satisfait à

$$r(E) \leqq r(E') \qquad \text{si } E \supset E',$$

ce qui résulte de la formule (29) et de l'inégalité manifeste

$$\min_{(p \in E)} \sum_{k=1}^{n} \sigma(p, p_k) \leqq \min_{p \in E'} \sum_{k=1}^{n} \sigma(p, p_k),$$

ayant lieu lorsque l'ensemble E' est contenu dans E.

6. Il se pose la question de savoir si l'inégalité (31) ne pourrait pas être remplacée par l'égalité

$$r(E) = v(E),$$

ce qui a lieu dans les deux cas particuliers considérés dans le paragraphe 4.

La réponse à cette question est négative, comme le prouve l'exemple suivant: Supposons que l'espace R se réduise à l'intérieur du cercle

$$|p| < 2$$

dans le plan de la variable complexe p et que $\sigma(p, q)$ soit égal à la distance $|p-q|$ des points p et q. Nous supposerons que l'ensemble E se compose des points du cercle $|p| \leqq 1$.

Dans ces hypothèses, on a d'après la formule (11)

$$V_n = \underset{(p_\nu \in E)}{\text{borne inf}}\, V(p_0, \dots, p_n) = \min_{(p_\nu \in E)} \sum_{j<k} |p_j - p_k| = 0,$$

d'où l'on conclut que $v_n = 0$ et par suite $v(E) = 0$. D'autre part, on a d'après la formule (29)

$$R_n = \underset{(p_\nu)}{\text{borne sup}} \left\{ \min_{(p \in E)} \sum_{k=1}^{n} |p - p_k| \right\} = 3n$$

et par suite $r_n = 3$ pour $n = 1, 2, \dots$, d'où l'on conclut que $r(E) = 3 > v(E)$, ce qui prouve notre assertion.

Sur un système particulier de deux équations différentielles ordinaires admettant un point singulier isolé

par

S. K. Zaremba (Kraków)

§ 1. Dans une note publiée avec M. A. Bielecki dans le volume précédent de ces Annales[1]), nous avons construit au moyen de fonctions de la classe C^{∞} [2]) un système d'équations différentielles de la forme

$$(1) \qquad \frac{dx}{X(x,y,z)} = \frac{dy}{Y(x,y,z)} = \frac{dz}{Z(x,y,z)},$$

admettant un point singulier isolé que n'atteint aucune caractéristique de ce système, ce qui contredit une supposition pouvant paraître, par analogie, assez légitime et d'après laquelle tout point singulier isolé d'un système d'équations différentielles de la forme (1) serait atteint par une caractéristique au moins de ce système d'équations, à condition, bien entendu, que les fonctions $X(x,y,z)$, $Y(x,y,z)$, $Z(x,y,z)$ soient suffisamment régulières, c.-à-d. appartiennent à la classe C ou C^1. Cependant, le système d'équations envisagé dans la note citée possède cette particularité que les dérivées partielles de tous les ordres des fonctions $X(x,y,z)$, $Y(x,y,z)$, $Z(x,y,z)$ s'annulent au point singulier.

---

[1]) *Sur les points singuliers des systèmes de deux équations différentielles ordinaires*, p. 135—139.

[2]) Nous appelons C la classe des fonctions continues, C^n celle des fonctions admettant des dérivées (ou respectivement des dérivées partielles) continues jusqu'à l'ordre n inclusivement et C^{∞}, la classe des fonctions admettant des dérivées (ou respectivement des dérivées partielles) continues de tous les ordres.

Il y a peut-être quelque intérêt à faire voir comment on peut former, en se basant sur un principe topologique entièrement différent, un système de deux équations différentielles de la forme (1) ayant la même propriété que le précédent, mais avec cette différence que les dérivées partielles du premier ordre des fonctions $X(x,y,z)$, $Y(x,y,z)$, $Z(x,y,z)$ ne soient plus toutes nulles au point singulier. Je pense aussi que l'exemple particulier auquel est consacrée cette note peut servir à se faire une meilleure idée des configurations possibles des caractéristiques autour d'un point singulier isolé d'un système de deux équations différentielles, configurations qui n'ont pas été étudiées jusqu'à présent d'une façon systématique et générale à la fois et dont la multiplicité est infiniment plus variée que celle qui correspond au cas d'une seule équation dans le plan.

Nous allons maintenant définir quelques fonctions auxiliaires utiles dans la suite. Posons:

$$F(x,a,b) = \exp\{-2^{-4}\cdot(b-a)^4\cdot(x-a)^{-2}\cdot(x-b)^{-2}\}$$

pour x contenu entre a et b et $F(x,a,b)=0$ partout ailleurs; cette fonction est bien définie pour x quelconque et $a \neq b$, d'ailleurs arbitraires. Elle appartient à la classe C^∞ et atteint son maximum, égal à l'unité, pour $x=(a+b)/2$.

Faisons maintenant

$$G(x,a,b) = \frac{\int_a^x F(u,a,b)\,du}{\int_a^b F(u,a,b)\,du}\ ^{1)}.$$

La fonction ainsi obtenue est aussi de la classe C^∞. Elle est bien définie pour tout ensemble de valeurs des variables satisfaisant à l'inégalité $a \neq b$, elle est constante dans chacun des deux intervalles que l'on obtient on retranchant de l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ l'intervalle (a,b); d'ailleurs, il est clair qu'on a identiquement

(2) $$G(a,a,b)=0, \quad G(b,a,b)=1.$$

---

[1]) Une fonction analogue a été considérée précédemment par M. A. Bielecki dans un mémoire *Sur une généralisation d'un théorème de Weierstrass* (tome X de ces Annales, p. 33—41).

Soit

$$H(x,a,b)=G\left(x,a,\frac{3a+b}{4}\right)+G\left(x,b,\frac{a+3b}{4}\right)-1.$$

Voici une nouvelle fonction de la classe C^∞, définie pour les mêmes systèmes de valeurs des variables que la fonction précédente. Cette fonction est manifestement nulle en dehors de l'intervalle (a,b) et égale à l'unité dans l'intervalle $((3a+b)/4, (a+3b)/4)$. On déduit de cette dernière relation l'inégalité

$$\left|\int_a^b H(x,a,b)\,dx\right| > \frac{|b-a|}{2}, \tag{3}$$

satisfaite identiquement à condition que $a \neq b$.

Finalement, nous définissons la fonction $P(x,\xi,\eta,a,b)$, de la classe C^∞, par l'identité

$$P(x,\xi,\eta,a,b)=\frac{\eta\int_a^x H(u,a,b)\,du+\xi\int_x^b H(u,a,b)\,du}{\int_a^b H(u,a,b)\,du}.$$

La valeur de cette nouvelle fonction est donc bien définie dès que $a\neq b$; cette fonction est linéaire et homogène par rapport à ξ et η. A cause de la relation (3), on trouve identiquement

$$|P'_x(x,\xi,\eta,a,b)| < 2\left|\frac{\eta-\xi}{b-a}\right|. \tag{4}$$

D'ailleurs identiquement

$$\begin{cases} P(x,\xi,\eta,a,b)=\xi & \text{pour } x\leqslant a \text{ si } a<b \text{ et pour } x\geqslant a \text{ si } a>b,\\ P(x,\xi,\eta,a,b)=\eta & \text{pour } x\geqslant b \text{ si } a<b \text{ et pour } x\leqslant b \text{ si } a>b.\end{cases}$$

§ 2. Le système d'équations que nous allons construire sera de la forme

$$\frac{dx}{-y+\varphi(x,y,z)}=\frac{dy}{x+\psi(x,y,z)}=\frac{dz}{\chi(x,y,z)}, \tag{5}$$

les fonctions $\varphi(x,y,z)$, $\psi(x,y,z)$ et $\chi(x,y,z)$ étant de la classe C^∞ et s'annulant, ainsi que leurs dérivées partielles de tous les ordres, à l'origine, qui constituera le seul point singulier de ce système d'équations. Nous allons maintenant former précisément les fonctions $\varphi(x,y,z)$, $\psi(x,y,z)$ et $\chi(x,y,z)$.

Posons

$$\gamma_i(x,y,z)=H(z,2^{-(i+1)},2^{-i})\cdot H(\sqrt{x^2+y^2},-2^{-(i+1)},2^{-(i+1)})$$

$(i=0,1,2,...)$. Désignons par k_i l'inverse, divisé par $2(i+1)$, de la plus grande parmi les bornes supérieures des valeurs absolues de la fonction $\gamma_i(x,y,z)$ (qui est manifestement de la classe C^∞) et de toutes ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre i inclusivement $(i=0,1,2,...)$. Cette borne est en effet finie, puisqu'en dehors de la région

$$(D_i) \qquad x^2+y^2\leqslant 2^{-2(i+1)},\quad 2^{-(i+1)}\leqslant z\leqslant 2^{-i},$$

on a identiquement $\gamma_i(x,y,z)=0$. Elle est aussi manifestement positive. Les nombres $\{k_i\}$ sont donc tous bien définis et positifs.

En nous réservant la faculté de préciser ensuite la valeur des constantes non négatives $r_0, r_1, r_2, ...$, supposées satisfaire aux inégalités

$$(6) \qquad r_i\leqslant 3^{-1}\cdot 2^{-(i+3)} \qquad (i=0,1,2,...),$$

formons la fonction auxiliaire

$$Q_i(u,v)=$$
$$=u-P(u,0,2r_i\cdot H(v,-2^{-(i+3)},2^{-(i+3)}),-2^{-(i+3)},r_i\cdot H(v,-2^{-(i+3)},2^{-(i+3)}))+$$
$$+P(u,0,2r_i\cdot H(v,-2^{-(i+3)},2^{-(i+3)}),r_i H(v,-2^{-(i+3)},2^{-(i+3)}),2^{-(i+3)}).$$

On vérifie facilement que cette fonction, définie dans tout le plan (u,v), est identiquement égale à u en dehors du carré $|u|,|v|\leqslant 2^{-(i+3)}$ et appartient à la classe C^∞. Pour $u\leqslant r_i\cdot H(v,-2^{-(i+3)},2^{-(i+3)})$, on trouve, à cause de (4) et (6):

$$\frac{\partial Q_i}{\partial u}=1-\frac{\partial P}{\partial x}\Bigg|_{\substack{x=u\\ \xi=0\\ \eta=2r_i\cdot H(v,-2^{-(i+3)},2^{-(i+3)})\\ a=-2^{-(i+3)}\\ b=r_i\cdot H(v,-2^{-(i+3)},2^{-(i+3)})}} >$$

$$>1-2\frac{2r_i\cdot H(v,-2^{-(i+3)},2^{-(i+3)})}{r_i\cdot H(v,-2^{-(i+3)},2^{-(i+3)})+2^{-(i+3)}}\geqslant$$

$$\geqslant 1-2\frac{2r_i\cdot H(v,-2^{-(i+3)},2^{-(i+3)})}{r_i\cdot H(v,-2^{-(i+3)},2^{-(i+3)})+3r_i}\geqslant$$

$$\geqslant 1-2\frac{2r_i\cdot H(v,-2^{-(i+3)},2^{-(i+3)})}{4r_i\cdot H(v,-2^{-(i+3)},2^{-(i+3)})}=0.$$

Comme, d'ailleurs, on trouve facilement

$$\frac{\partial Q_i}{\partial u} \geqslant 1$$

pour $u \geqslant r_i \cdot H(v, -2^{-(i+3)}, 2^{-(i+3)})$, nous avons partout

$$\frac{\partial Q_i}{\partial u} > 0. \tag{7}$$

Posons maintenant identiquement

$$T_i(z, u, v) = P(z, Q_i(u, v), u, 5 \cdot 2^{-(i+3)}, 7 \cdot 2^{-(i+3)}).$$

D'après la définition de la fonction $P(x, \xi, \eta, a, b)$, il vient

$$\frac{\partial T_i}{\partial u} = \frac{\int\limits_{5 \cdot 2^{-(i+3)}}^{z} H(t, 5 \cdot 2^{-(i+3)}, 7 \cdot 2^{-(i+3)})\, dt + \frac{\partial Q_i}{\partial u} \int\limits_{z}^{7 \cdot 2^{-(i+3)}} H(t, 5 \cdot 2^{-(i+3)}, 7 \cdot 2^{-(i+3)})\, dt}{\int\limits_{5 \cdot 2^{-(i+3)}}^{7 \cdot 2^{-(i+3)}} H(t, 5 \cdot 2^{-(i+3)}, 7 \cdot 2^{-(i+3)})\, dt},$$

donc, à cause de (7), identiquement

$$\frac{\partial T_i}{\partial u} > 0.$$

Ceci permet de résoudre par rapport à la variable u l'équation

$$\xi = T_i(z, u, v).$$

Soit

$$u = R_i(z, \xi, v)$$

la solution. Comme $T_i(z, u, v)$ appartient manifestement à la classe C^∞, il résulte de la théorie générale des fonctions implicites que la fonction $R_i(z, u, v)$ est de la même classe. Soit

$$\Phi_i(\xi, \eta, z) = \frac{\partial T_i}{\partial z}\Big|_{\substack{u = R(z, \xi, \eta) \\ v = \eta}}$$

par définition. Nous obtenons ainsi encore une fonction de la classe C^∞, définie pour tous les systèmes de valeurs des variables ξ, η, z. On vérifie facilement qu'elle est identiquement nulle

pour toutes les valeurs de la variable z situées en dehors de l'intervalle $(5\cdot 2^{-(i+3)}, 7\cdot 2^{-(i+3)})$, ξ et η étant absolument quelconques.

Faisons alors

$$\begin{cases} \varphi_i(x,y,z) = \Phi_i\left(x\cos\frac{z}{k_i} - y\sin\frac{z}{k_i}, x\sin\frac{z}{k_i} + y\cos\frac{z}{k_i}, z\right)\cdot\cos\frac{z}{k_i}, \\ \psi_i(x,y,z) = -\Phi_i\left(x\cos\frac{z}{k_i} - y\sin\frac{z}{k_i}, x\sin\frac{z}{k_i} + y\cos\frac{z}{k_i}, z\right)\cdot\sin\frac{z}{k_i}. \end{cases}$$

Les fonctions $\varphi_i(x,y,z)$ et $\psi_i(x,y,z)$ dépendent du paramètre r_i, figurant dans l'expression de la fonction $Q_i(u,v)$ qui nous a servi à les former. Comme fonctions des variables x, y, z, r_i, les fonctions $\varphi_i(x,y,z)$ et $\psi_i(x,y,z)$ sont encore de la classe C^∞. D'ailleurs, pour $r_i=0$, on a $\varphi_i(x,y,z)=\psi_i(x,y,z)=0$ identiquement par rapport à x, y, z. Les fonctions en question étant de plus identiquement nulles dès que le point (x,y,z) est situé en dehors de la région (D_i), on en déduit la possibilité de choisir la valeur du paramètre r_i positive de façon que les fonctions

$$k_i\varphi_i(x,y,z) \quad \text{et} \quad k_i\psi_i(x,y,z)$$

ainsi que leurs dérivées partielles par rapport aux variables x, y, z jusqu'à l'ordre i inclusivement soient inférieures ou égales en valeur absolue à $1/(i+1)$. Nous fixons alors le paramètre r_i en lui attribuant la plus grande des valeurs satisfaisant à cette condition et à l'inégalité (6); cette valeur est donc positive.

Posons ensuite

$$(8)\qquad \begin{cases} \varphi(x,y,z) = -\sum_{i=0}^{\infty} k_i\varphi_i(x,y,|z|), \\ \psi(x,y,z) = -\sum_{i=0}^{\infty} k_i\psi_i(x,y,|z|). \end{cases}$$

Ces deux séries se réduisent en chaque point de l'espace à un au plus de leurs termes et il résulte des limitations auxquelles ceux-ci sont sujets que les deux fonctions représentées par ces séries admettent pour $z=0$ des dérivées partielles de tous les ordres nulles. Les fonctions $\varphi(x,y,z)$ et $\psi(x,y,z)$, définies dans tout l'espace, sont donc bien de la classe C^∞.

Soit $s_0=r_0$ et, en général, s_i le plus petit des deux nombres r_i et r_{i-1} $(i=1,2,...)$. Posons

$$\varepsilon_i(x,y,z)=F(z,7\cdot 2^{-(i+3)},9\cdot 2^{-(i+3)})\cdot F(\sqrt{x^2+y^2},-s_i,s_i)$$

et désignons par c_i l'inverse, divisé par $2(i+1)$, de la plus grande des bornes supérieures des valeurs absolues de cette fonction et de ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre i inclusivement dans la région $7\cdot 2^{-(i+3)}\leqslant z\leqslant 9\cdot 2^{-(i+3)}, x^2+y^2\leqslant s_i^2$, en dehors de laquelle d'ailleurs elle est identiquement nulle $(i=1,2,...)$; pour $i=0$, nous prendrons

$$\varepsilon_0(x,y,z)=G(z,\tfrac{7}{8};1)\cdot F(\sqrt{x^2+y^2},-s_0,s_0),\quad c_0=1/2.$$

Finalement, faisons

$$\chi(x,y,z)=-\operatorname{sgn} z\Big\{\sum_{i=0}^{\infty}k_i\gamma_i(x,y,|z|)+\sum_{i=0}^{\infty}c_i\varepsilon_i(x,y,|z|)\Big\}. \tag{9}$$

Chacune de ces deux séries se réduit en chaque point de l'espace à un seul de ses termes et il résulte de la façon dont nous avons choisi les coefficients k_i et c_i que la fonction que nous venons de former appartient à la classe C^∞ et s'annule avec toutes ses dérivées partielles de tous les ordres pour $z=0$ et, en particulier, à l'origine. La construction du système (5) est donc achevée.

§ 3. Pour examiner la disposition des caractéristiques du système d'équations (5), remarquons tout d'abord que celle-ci est symétrique par rapport au plan $z=0$. Nous pouvons donc nous borner à la partie de l'espace pour laquelle $z\geqslant 0$. Comme il s'agit du voisinage du point singulier, situé à l'origine, nous pouvons même nous borner à la couche $0\leqslant z\leqslant 1$ (l'intégration du système d'équations (5) pour $z\geqslant 1$ ne présente aucune difficulté et sa signification géométrique est évidente). Dans la couche envisagée, en dehors de la région

$$D=\sum_{i=1}^{\infty}D_i,$$

les caractéristiques sont formées par des circonférences centrées sur l'axe $0z$ et situées dans des plans normaux à celui-ci, car on a dans cette portion de l'espace identiquement

$$\varphi(x,y,z)=\psi(x,y,z)=\chi(x,y,z)=0.$$

Quand aux régions D_i elles-mêmes, chacune d'elles est limitée par des surfaces recouvertes de caractéristiques de la même forme, à l'exception de l'intérieur de deux cercles: du cercle C_i:

$$(C_i) \qquad x^2+y^2=s_i^2, \; z=2^{-i}$$

et du cercle C_{i+1}:

$$x^2+y^2=s_{i+1}^2, \; z=2^{-(i+1)}$$

($i=0,1,2,...$). C'est par l'intérieur de ces cercles que les caractéristiques de l'équation (5) passent de la région D_i respectivement aux régions D_{i-1} et D_{i+1} ($i=1,2,...$). D'ailleurs il est clair que dans l'intérieur de la couche $0 \leqslant z \leqslant 1$, aucune caractéristique ne peut ni entrer dans la région D, ni en sortir.

Si nous avions fait partout $\varphi(x,y,z)=\psi(x,y,z)=0$, toutes les caractéristiques seraient tracées sur des cylindres de révolution ayant pour axe l'axe Oz; une partie des caractéristiques traversant l'intérieur du cercle C_i passeraient par l'intérieur de C_{i+1} et en particulier l'axe Oz formerait une caractéristique qui atteindrait l'origine en passant par le centre de chacun des cercles $\{C_i\}$. Cependant, la perturbation introduite par les fonctions $\varphi(x,y,z)$ et $\psi(x,y,z)$ a pour effet de faire dévier les caractéristiques passant par l'intérieur de C_i, de façon qu'aucune d'elles n'atteigne plus l'intérieur du cercle C_{i+1}, mais qu'elles se condensent toutes sur des circonférences concentriques avec lui, situées dans le même plan et faisant partie de la frontière de la région D_i. En poursuivant en sens inverse les caractéristiques passant par l'intérieur du cercle C_{i+1}, on constate une déviation analogue, à la suite de laquelle, au lieu de passer par l'intérieur du cercle C_i, elles se condensent sur la partie de la frontière de D_i, située dans le même plan, à l'extérieur de ce cercle.

Cette déviation se produit, bien entendu, dans la région d_i:

$$(d_i) \qquad 5 \cdot 2^{-(i+3)} \leqslant z \leqslant 7 \cdot 2^{-(i+3)}, \; x^2+y^2=2^{-2(i+2)},$$

située dans l'intérieur de D_i, car en dehors de cette région dans D_i, on a toujours $\varphi(x,y,z)=\psi(x,y,z)=0$. Une caractéristique passant par l'intérieur du cercle C_i atteint donc le plan $z=7 \cdot 2^{-(i+3)}$ sans changer sa distance à l'axe Oz, qui, par suite, est inférieure ou égale à s_i, donc, à plus forte raison, à r_i. Pour étudier plus

exactement la forme d'une telle caractéristique, introduisons une variable auxiliaire t, en substituant au système (5) le suivant:

$$(10)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y + \varphi(x, y, z), \\ \dfrac{dy}{dt} = x + \psi(x, y, z), \\ \dfrac{dz}{dt} = \chi(x, y, z). \end{cases}$$

Il est commode d'interpréter cette nouvelle variable comme représentant le temps. Nous pouvons alors définir un système de coordonnées mobile, (ξ, η, z), ayant toujours la même origine que le système (x, y, z) et le troisième axe commun avec ce système, le nouveau trièdre des coordonnées tournant autour de cet axe avec une vitesse angulaire égale à l'unité. Si l'on suppose que pour $t=0$ les deux systèmes coïncident, les formules pour le passage d'un système à l'autre seront

$$\begin{cases} x = \xi \cos t - \eta \sin t, \\ y = \xi \sin t + \eta \cos t, \\ z = z. \end{cases}$$

Par rapport au système de coordonnées (ξ, η, z), le mouvement d'un point mobile obéissant aux équations différentielles (10) et se trouvant, au moment $t=-7\cdot 2^{-(i+3)}\cdot k_i^{-1}$, dans le plan $z=7\cdot 2^{-(i+3)}$ est donné, comme on le vérifie facilement, par les formules suivantes:

$$\xi = T_i(-k_i t, u, v), \quad \eta = v, \quad z = -k_i t.$$

D'après la définition de la fonction $T_i(z, u, v)$ et les identités à la fin du § 1, le mobile atteint donc, à l'instant $t=-5\cdot 2^{-(i+3)}\cdot k_i^{-1}$, le plan $z=5\cdot 2^{-(i+3)}$ avec des coordonnées $\xi = Q_i(u, v)$, $\eta = v$. Mais on avait $u^2+v^2 \leqslant s_i^2 \leqslant r_i^2$, puisque le mobile venait de passer par l'intérieur du cercle C_i et sa distance à l'axe Oz ne variait pas jusqu'à son entrée dans la région d_i. On avait donc

$$(11)\qquad u < r_i$$

et

$$|v| < r_i \leqslant 3^{-1}\cdot 2^{-(i+3)} < 2^{-(i+4)}.$$

On déduit de cette dernière inégalité

$$(12)\qquad H(v, -2^{-(i+3)}, 2^{-(i+3)}) = 1,$$

donc, à cause de (11),

(13) $$u<r_i\cdot H(v, -2^{-(i+3)}, 2^{-(i+3)}).$$

Or, pour $u=r_i\cdot H(v, -2^{-(i+3)}, 2^{-(i+3)})$, on trouverait, d'après la définition de la fonction $Q_i(u, v)$,

$$Q_i(u, v) = -r_i\cdot H(v, -2^{-(i+3)}, 2^{-(i+3)}).$$

Grâce à (7) et (13), on a donc dans notre cas

$$\xi = Q_i(u, v) < -r_i\cdot H(v, -2^{-(i+3)}, 2^{-(i+3)})$$

et, en vertu de (12),

$$\xi < -r_i.$$

A fortiori

$$\xi^2+\eta^2 > r_i^2 \geqslant s_{i+1}^2.$$

Finalement, on trouve pour les coordonnées du mobile à l'instant $t=-5\cdot 2^{-(i+3)}\cdot k_i^{-1}$, exprimées dans le système primitif, l'inégalité

$$x^2+y^2 > s_{i+1}^2.$$

Comme le mobile quitte à cet instant la région d_i, la suite de sa trajectoire est tracée sur un cylindre de révolution d'axe Oz, dont le rayon, d'après la dernière inégalité, surpasse s_{i+1}. Par suite, le mobile ne peut pas quitter la région D_i et la caractéristique qu'il décrit se condense sur une circonférence concentrique avec C_{i+1} et située dans le même plan.

Aucune caractéristique du système d'équations (5) ne peut donc avoir de points communs avec plus de deux des régions D_i. Nous trouvons ainsi dans la couche $0\leqslant z\leqslant 1$ quatre types suivants de caractéristiques:

1) des circonférences centrées sur l'axe Oz et situées dans des plans normaux à celui-ci;

2) des caractéristiques dont chacune est située dans l'une des régions D_i (ces caractéristiques se condensant manifestement sur des circonférences situées dans les plans $z=2^{-i}$ et $z=2^{-(i+1)}$);

3) des caractéristiques dont chacune relie l'une des régions D_i à la région suivante dans la suite $\{D_i\}$, en se condensant sur des circonférences situées respectivement dans les plans $z=2^{-i}$ et $z=2^{-(i+2)}$;

4) des caractéristiques pénétrant dans la couche $0 \leqslant z \leqslant 1$ par l'intérieur de cercle C_0 et se condensant sur des circonférences situées dans le plan $z=1/2$.

Il est clair que les cycles-limites sur lesquels les caractéristiques des trois derniers types se condensent sont eux-mêmes des caractéristiques du premier type.

§ 4. Il résulte de ce qui précède que non seulement aucune caractéristique du système d'équations (5) n'atteint l'origine, mais encore que si l'on considère l'ensemble des caractéristiques passant par les points d'une sphère centrée à l'origine, la borne inférieure des distances des points de ces caractéristiques à l'origine sera toujours positive. Il vaut peut-être la peine de remarquer qu'on peut facilement modifier le système envisagé de façon que cette circonstance n'ait plus lieu, sans qu'aucune des caractéristiques n'atteigne le point singulier lui-même.

En effet, posons

$$f(x,y,z) = \exp\left\{-\frac{1}{(x^2+y^2-z^2)^2} - \frac{1}{z^2}\right\}$$

pour

(14) $$x^2+y^2>z^2,\ z>0$$

et $f(x,y,z)=0$ partout ailleurs. Cette fonction est manifestement de la classe C^∞. Considérons maintenant le système d'équations

$$\frac{dx}{-y+\varphi(x,y,z)-xf(x,y,z)} = \frac{dy}{x+\psi(x,y,z)-yf(x,y,z)} = \frac{dz}{\chi(x,y,z)}.$$

Les dénominateurs sont ici, comme dans le système (5), de la classe C^∞. Par rapport au système (5), la modification ne se rapporte qu'aux caractéristiques passant par les points satisfaisant aux inégalités (14). Nous n'avions là précédemment que des caractéristiques du premier type; actuellement, nous trouverons des spirales tendant d'un côté vers l'infini et se condensant de l'autre côté chacune sur une caractéristique du premier type située sur le cône $x^2+y^2=z^2$. Chacune de ces spirales est située dans un plan normal à l'axe Oz et quand ce plan tend vers le plan $z=0$, la distance minimum des spirales à l'origine tend vers zéro, mais à la limite, c.-à-d. dans le plan $z=0$ lui-même, au lieu d'une courbe atteignant l'origine, on trouve un faisceau de cercles concentriques.

Je termine par une remarque relative à l'indice de Kronecker[1]. Dans l'exemple élaboré par M. Bielecki et moi (*loc. cit.*), le point singulier avait un indice nul. On le vérifie facilement en remarquant la possiblité de modifier la définition des fonctions $X(x, y, z)$, $Y(x, y, z)$ et $Z(x, y, z)$ à l'intérieur du tore S_0 sans les changer ailleurs et sans rompre leur continuité, de façon cependant qu'elles ne s'annulent nulle part simultanément, donc en supprimant la singularité. Or l'indice de l'origine par rapport au système d'équations (5), c.-à-d. par rapport au champ vectoriel

$$(-y + \varphi(x, y, z), x + \psi(x, y, z), \chi(x, y, z)),$$

est égal à -1.

En effet, si l'on compare ce champ au champ vectoriel

$$X(x, y, z) = -x, \quad Y(x, y, z) = -y, \quad Z(x, y, z) = -z,$$

par rapport auquel l'indice de l'origine est manifestement égal à -1[2]) on remarque que les vecteurs, relatifs au même point, des deux champs n'ont jamais des directions opposées. On en déduit, d'après le théorème de Poincaré-Bohl[3]), que l'origine a le même indice par rapport aux deux champs. L'indice de l'origine par rapport au système (5) est donc bien -1. De légères modifications apportées au système envisagé suffiraient cependant pour obtenir comme indice soit le nombre $+1$, soit zéro.

---

[1]) Voir par exemple: J. Tannery, *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable*, Tome II, Paris 1910, *Note* de M. Hadamard *Sur quelques applications de l'indice de Kronecker*, p. 437—477.

[2]) *Cf.* H. Poincaré, *Sur les courbes définies par les équations différentielles*, IVe partie, Journal de Math., (4), **2**, 1886, 151—217 ou bien dans les *Oeuvres* de Poincaré, Tome I, Paris 1928, p. 167—222, au début du chapitre XVIII.

[3]) *Cf.* Hadamard, *loc. cit.*

Über die Clifford-Lipschitzschen hyperkomplexen Zahlensysteme

von

Duwid Wajnsztejn (Kraków)

Einleitung und Erklärung von Symbolen

W. Clifford und R. Lipschitz[1]) haben komplexe Zahlensysteme von 2^n Einheiten untersucht, die eine Verallgemeinerung der komplexen Zahlen und Quaternionen sind.

Sie nehmen

$$e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n$$

als Primitiveinheiten an, für welche die Multiplikationsregeln

$$e_i^2 = -1, \quad e_i e_k = -e_k e_i \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n; \; i \neq k)$$

definiert sind.

Die 2^n Grössen

$$1$$
$$e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n$$
$$e_1e_2, e_1e_3, \ldots, e_1e_n, e_2e_3, \ldots, e_2e_n, \ldots, e_{n-1}e_n$$
$$e_1e_2e_3, e_1e_2e_4, \ldots, e_1e_2e_n, \ldots, e_{n-2}e_{n-1}e_n$$
$$\cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot$$
$$e_1e_2e_3 \ldots e_n$$

sind als hyperkomplexe *Einheiten* angenommen.

Wir werden ein hyperkomplexes Zahlensystem aufbauen, welches mit dem Clifford-Lipschitz — System übereinstimmt.

Wir werden die Matrizenrechnung benützen.

Es werden folgende Symbolen erklärt:

Ist

(1) $$A = \|a_{ik}\| \qquad (i,k = 1, 2, 3, \ldots, 2^n; \; a_{ik} \text{— reellwertig})$$

---

[1]) Enz. d. Math. Wiss. III. 1. S. 1410—1419.

dann bedeuten

(2) $$A^* = \|a_{ki}\| = \|a^*_{ik}\| \qquad (i,k=1,2,\ldots,2^n)$$

die *transponierte* Matrix,

(3) $$A' = \|a_{i,2^n-k+1}\| = \|a'_{ik}\| \qquad (i,k=1,2,\ldots,2^n)$$

die *gespiegelte* Matrix,

(4) $$\begin{matrix} A^{(1)}=\|a_{ik}\|=\|a^{(1)}_{ik}\| & A^{(2)}=\|a_{i,2^{n-1}+k}\|=\|a^{(2)}_{ik}\| \\ A^{(3)}=\|a_{2^{n-1}+i,k}\|=\|a^{(3)}_{ik}\| & A^{(4)}=\|a_{2^{n-1}+i,2^{n-1}+k}\|=\|a^{(4)}_{ik}\| \end{matrix} \quad (i,k=1,2,\ldots,2^{n-1}).$$

Wird jede der vier Teilmatrizen (4) in vier weitere gespolten, dann bezeichnen wir die nächsten Teilmatrizen mit Doppeltindexen:

(5) $$\begin{matrix} A^{(m1)}=\|a^{(m)}_{ik}\|=\|a^{(m1)}_{ik}\| & A^{(m2)}=\|a^{(m)}_{i,2^{n-2}+k}\|=\|a^{(m2)}_{ik}\| \\ A^{(m3)}=\|a^{(m)}_{2^{n-2}+i,k}\|=\|a^{(m3)}_{ik}\| & A^{(m4)}=\|a^{(m)}_{2^{n-2}+i,2^{n-2}+k}\|=\|a^{(m4)}_{ik}\| \end{matrix} \quad \begin{matrix}(i,k=1,2,\ldots,2^{n-2}, \\ m=1,2,3,4).\end{matrix}$$

Ähnlich sind die Matrizen $A^{(mnp)}$ u. s. w. erklärt.

Mit δ_{ik} bezeichnen wir *Kroneckers Delten*

(6) $$\delta_{ii}=1 \qquad \delta_{ik}=0 \qquad (i \neq k).$$

Eine Matrix der Gestalt

$$M = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{11} & c_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{21} & c_{22} \end{matrix} \right\|$$

nennen wir *Quasidiagonalmatrix* und bezeichnen sie mit

$$M = [A, B, C]$$

wo

$A=\|a_{ik}\|$ $(i,k=1,2,3)$; $B=\|b_{ik}\|$ $(i,k=1)$; $C=\|c_{ik}\|$ $(i,k=1,2)$.

Die Matrix $\|\delta_{ik}\|$ bezeichnen wir mit E_1.

Die *Nullmatrix* $\|0\|$ bezeichnen wir mit O.

Die Matrizen werden im folgenden wie hyperkomplexe Zahlen behandelt.

§ 1

1. Wir geben eine Rekursionsdefinition der α-Matrizen.

Definition: *Eine reellwertige Matrix des zweiten Grades*

$$A = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \right\|$$

ist vom Typus α, *wenn die folgende* (α)-*Bedingungen stattfinden*

$$(\alpha) \qquad a_{11} = a_{22} \qquad a_{12} = -a_{21}.$$

Eine Matrix A *vom Grade* 2^n *ist eine* α-*Matrix, wenn*

(α) $\quad A^{(1)} = A^{(4)}$; $A^{(2)} = -A^{(3)}$; $A^{(1)}$ *und* $(A^{(2)})'$ α-*Matrizen sind.*

2. Um einen Konkreten Beispiel zu haben, bilden wir eine α-Matrix A vom Grade $2^3=8$, die in der *ersten* Zeile die gegebenen 8 reelle Zahlen besitzt

$$(7) \qquad a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8.$$

Die Matrizen $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, $A^{(3)}$, $A^{(4)}$ sind vom Grade 4. $A^{(1)}$ soll eine α-Matrix sein. Wir erwägen die Matrizen $A^{(11)}$, $A^{(12)}$, $A^{(13)}$ und $A^{(14)}$. Sie sind vom Grade 2. $A^{(11)}$ und $(A^{(12)})'$ sollen α-Matrizen sein, also

$$A^{(11)} = A^{(14)} = \left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 \\ -a_2 & a_1 \end{matrix} \right\|$$

$$A^{(12)} = -A^{(12)} = \left\| \begin{matrix} a_3 & a_4 \\ a_4 & -a_3 \end{matrix} \right\|$$

Ähnlich bauen wir die Matrizen $A^{(m,n)}$ $(m=2,3,4;\ n=1,2,3,4)$. Aus diesen Matrizen bilden wir die Matrizen $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, $A^{(3)}$ und $A^{(4)}$ nach der α-Regel. Z. B.;

$$A^{(1)} = \left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ -a_2 & a_1 & a_4 & -a_3 \\ -a_3 & -a_4 & a_1 & a_2 \\ -a_4 & a_3 & -a_2 & a_1 \end{matrix} \right\|$$

Aus den Matrizen $A^{(m)}$ $(m=1, 2, 3, 4)$ bilden wir die geforderte Matrix

$$A = \left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 \\ -a_2 & a_1 & a_4 & -a_3 & -a_6 & a_5 & a_8 & -a_7 \\ -a_3 & -a_4 & a_1 & a_2 & a_7 & a_8 & -a_5 & -a_6 \\ -a_4 & a_3 & -a_2 & a_1 & a_8 & -a_7 & a_6 & -a_5 \\ -a_5 & -a_6 & -a_7 & -a_8 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_6 & -a_5 & -a_8 & a_7 & -a_2 & a_1 & a_4 & -a_3 \\ -a_7 & -a_8 & a_5 & a_6 & -a_3 & -a_4 & a_1 & a_2 \\ -a_8 & a_7 & -a_6 & a_5 & -a_4 & a_3 & -a_2 & a_1 \end{matrix} \right\|$$

3. Wir sehen also, dass *die Elemente der ersten Zeile der α-Matrix dieselbe vollständig definieren.* Es wird deshalb berechtigt sein die α-Matrix mit dem Symbol

(8) $$A = \|a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots, a_{12^n}\|$$

zu bezeichnen.

4. *Werden wir in der α-Matrix die Elemente mit ihrem absoluten Betrag vertreten, dann erhalten wir eine Matrix die in betreff zu den beiden Diagonalen $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{2^n 2^n}$ und $a_{12^n}, a_{2\cdot 2^n-1}, \ldots, a_{2^n\cdot 1}$ symetrisch wird.*

In Formeln

(9) $$|a_{ik}| = |a_{kl}|$$

(10) $$|a_{ik}| = |a_{2^n-k+1, 2^n-i+1}| \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, 2^n).$$

Wir führen einen Rekursionsbeweis durch.

Für die α-Matrizen des zweiten Grades ist unsere Behauptung trivial. Wir nehmen an, dass unsere Behauptung (d. h. die Formeln (9) und (10)) bei den α-Matrizen des 2^{n-1}-en Grades erfüllt ist. Wir betrachten eine α-Matrix A vom Grade 2^n. Nehmen wir in Acht, dass $A^{(1)}$ und $A^{(4)}$ α-Matrizen sind, so stellen wir gleich fest, dass (9) für $i, k = 1, 2, \ldots, 2^{n-1}$ und $i, k = 2^{n-1}+1, \ldots, 2^n$ erfüllt ist. Die formeln (9) und (10) stellen aber fest, dass unsere Behauptung nicht nur bei α-Matrizen, sondern auch bei den zu α-Matrizen gespiegelten statt findet. Wenden wir nun (9) und (10) auf die Matrix $A^{(3)}$ an, so haben wir

$$|a^{(3)}_{ik}| = |a^{(3)}_{ki}| \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, 2^{n-1}).$$

Aus (α)

$$|a^{(3)}_{ki}| = |a^{(2)}_{ki}| \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, 2^{n-1}).$$

Aus (4)

(11) $$|a_{2^{n-1}+i,k}| = |a_{2^{n-1}+k,i}|$$

(12) $$|a_{2^{n-1}+k,i}| = |a_{k,2^{n-1}+i}| \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, 2^{n-1}).$$

Aus (11) und (12) folgt

$$|a_{2^{n-1}+i,k}| = |a_{k,2^{n-1}+i}| \qquad (i, k = 1, 2, ..., 2^{n-1})$$

d. h.

$$|a_{ik}| = |a_{ki}| \quad \text{für } i = 2^{n-1}+1, ..., 2^n;\ k = 1, 2, ..., 2^{n-1}$$

Wir haben also (9) für die α-Matrizen des Grades 2^n bewiesen. Ähnlich läuft der Beweis für (10) und damit ist unser Satz bewiesen.

5. *In der α-Matrix*

$$A = \|a_{1n}, a_{12}, a_{13}, ..., a_{12^n}\|$$

kommt in jeder Zeile und in jeder Kolonne das Element a_{1i} $(i = 1, 2, ..., 2^n)$ *mit dem Vorzeichen + oder — vor.*

Wir verzichten auf den leichten Rekursionsbeweis.

6. *Ist A eine α-Matrix, dann ist auch die transponierte Matrix A^* eine α-Matrix.*

Den leichten Rekursionsbeweis, der auf der Anmerkung, dass $(A^*)' = (A')^*$ beruht, lassen wir durch.

7. *Die Matrizen E_1 und O* sind *α-Matrizen.*

§ 2

In diesem Abschnitte werden wir zeigen, dass *die α-Matrizen einen Zahlenkörper bilden.*

8. *Die Summe von zwei α-Matrizen ist eine α-Matrix.*

Der Beweis geht aus der (α)-Definition hervor.

9. *Multipliziert man eine α-Matrix mit einer reellen Konstante k, so erhaltet man wieder eine α-Matrix.*

Der Beweis folgt aus der (α)-Definition.

In Besonderheit für $k = -1$ haben wir: *Zusammen mit B ist $-B$ eine α-Matrix.* Verwenden wir jetzt 8. dann haben wir *Der Unterschied von zwei α-Matrizen ist eine α-Matrix.*

10. *Der Produkt von zwei α-Matrizen ist eine α-Matrix.*

Wir beweisen den Satz in einer allgemeineren Weise:

Sind A, B, C' und D' α-Matrizen, dann sind die Matrizen

(13) $$AB,\ CD,\ (AC)',\ (CA)'$$

auch α-Matrizen.

Wir führen einen Rekursionsbeweis durch:

Für die Matrizen von 2-ten Grade stellen wir die Richtigkeit unseres Satzes durch unmittelbare Multiplikation fest:

$$\begin{Vmatrix} a_1, & a_2 \\ -a_2, & a_1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} b_1, & b_2 \\ -b_2, & b_1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_1b_1 - a_2b_2, & a_2b_1 + a_1b_2 \\ -a_1b_2 - a_2b_1, & -a_2b_2 + a_1b_1 \end{Vmatrix},$$

$$\begin{Vmatrix} a_1, & a_2 \\ -a_2, & a_1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} c_1, & c_2 \\ c_2, & -c_1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_1c_1 - a_2c_2, & a_2c_1 + a_1c_2 \\ a_1c_2 + a_2c_1, & a_2c_2 - a_1c_1 \end{Vmatrix},$$

$$\begin{Vmatrix} c_1, & c_2 \\ c_2, & -c_1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} d_1, & d_2 \\ d_2, & -d_1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} c_1d_1 + c_2d_2, & c_2d_1 - c_1d_2 \\ c_1d_2 - c_2d_1, & c_2d_2 + c_1d_1 \end{Vmatrix},$$

$$\begin{Vmatrix} c_1, & c_2 \\ c_2, & -c_1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} a_1, & a_2 \\ -a_2, & a_1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} c_1a_1 + c_2a_2, & c_2a_1 - c_1a_2 \\ -c_1a_2 + c_2a_1, & -c_2a_2 - c_1a_1 \end{Vmatrix}.$$

Wir nehmen an, dass der Satz für die α-Matrizen vom Grade 2^{n-1} richtig ist und beweisen ihn für a-Matrizen vom Grade 2^n.

Wir beschränken uns auf die Durchführung des Beweises für die erste Formel von (13). Für die allen anderen läuft der Beweis identisch durch. Es sei

$$(14) \qquad C = AB$$

$$A = \|a_{ik}\| \qquad B = \|b_{ik}\| \qquad C = \|c_{ik}\| \quad (i, k = 1, 2, \dots, 2^n).$$

Die Matrizen $A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)}, A^{(4)}$, $B^{(1)}, B^{(2)}, B^{(3)}, B^{(4)}$, $C^{(1)}, C^{(2)}, C^{(3)}, C^{(4)}$ sind vom Grade 2^{n-1}.

Auf Grund der (α)-Definition ist:

$$(15) \quad \begin{matrix} A^{(1)} = A^{(4)} & B^{(1)} = B^{(4)} \\ A^{(3)} = -A^{(2)} & B^{(3)} = -B^{(2)} \end{matrix} \quad A^{(1)}, (A^{(2)})', B^{(1)}, (B^{(2)})' \textit{ sind } \alpha\textit{-Matrizen}$$

$$C^{(1)} = \|c_{ik}\| = \|\sum_{l=1}^{2^n} a_{il} b_{lk}\| = \|\sum_{l=1}^{2^{n-1}} a_{il} b_{lk}\| + \|\sum_{l=2^{n-1}+1}^{2^n} a_{il} b_{lk}\| = A^{(1)} B^{(1)} + A^{(2)} B^{(3)}$$

$$C^{(2)} = A^{(2)} B^{(1)} + A^{(4)} B^{(2)}; \quad C^{(3)} = A^{(3)} B^{(1)} + A^{(4)} B^{(3)}; \quad C^{(4)} = A^{(3)} B^{(2)} + A^{(4)} B^{(4)}.$$

Aus (15), wenn wir noch (13) in Acht nehmen ((13) ist richtig für Matrizen vom Grade 2^{n-1}) so haben wir:

$$C^{(1)} = C^{(4)}, \quad C^{(2)} = -C^{(3)}, \quad C^{(1)} \textit{ und } (C^{(2)})' \textit{ sind } \alpha\textit{-Matrizen.}$$

Damit ist der Beweis der ersten Formel von (13) zu Ende.

11. *Die Inverse einer α-Matrix A ist auch eine α-Matrix, wenn* Det $A \neq 0$ *ist.*

Es sei

$$A = \|a_{ik}\| \quad \text{Det}\, A \neq 0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, 2^n)$$

die gegebene α-Matrix.

Wir bezeichnen mit

$$\|x_{ik}\| = A^{-1}$$

also

(16) $$\|x_{ik}\| \cdot \|a_{ik}\| = E_1$$

Aus (16) folgen die Gleichungen

(17) $$\begin{aligned} x_{11}a_{11} + x_{12}a_{21} + \ldots + x_{12^n}a_{2^n1} &= 1, \\ x_{11}a_{12} + x_{12}a_{22} + \ldots + x_{12^n}a_{2^n2} &= 0, \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ x_{11}a_{12^n} + x_{12}a_{22^n} + \ldots + x_{12^n}a_{2^n2^n} &= 0. \end{aligned}$$

Wir bilden die α-Matrix

(18) $$X = \|x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{12^n}\|$$

Der Produkt $XA = Y$ ist auf Grund des Satzes 10, § 2 eine α-Matrix

$$Y = \|y_{11}, y_{12}, \ldots, y_{12^n}\|$$

Wir berechnen $y_{11}, y_{12}, \ldots, y_{12^n}$:

$$\begin{aligned} x_{11}a_{11} + x_{12}a_{21} + \ldots + x_{12^n}a_{2^n1} &= y_{11}, \\ x_{11}a_{12} + x_{12}a_{22} + \ldots + x_{12^n}a_{2^n2} &= y_{12}, \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ x_{11}a_{12^n} + x_{12}x_{22^n} + \ldots + x_{12^n}a_{2^n2^n} &= y_{12^n}. \end{aligned}$$

Aus (17) haben wir:

$$y_{11} = 1; \quad y_{12} = y_{13} = \ldots = y_{12^n} = 0.$$

Also

$$Y = E.$$

Daraus folgt

$$X = A^{-1}.$$

Nehmen wir in Acht (18), so kommen wir zum Schluss dass A^{-1} eine α-Matrix ist, w. z. b. w.

12. Aus 10 und 11 folgt, dass

die Quotienten AB^{-1} und $B^{-1}A$ zusammen mit A und B α-Matrizen sind, wenn nur $\operatorname{Det} B \neq 0$ *ist.*

§ 3

In diesem Abschnitte beleuchten wir den Zusammenhang unter den Zahlenkörpern der α-Matrizen vom Grade 2^k und 2^n.

13. Die α-Matrix ist durch die Elemente der ersten Zeile definiert

$$A = \|a_1, a_2, \dots, a_{2^n}\|$$

$$A = a_1\|1, 0, 0, \dots, 0\| + a_2\|0, 1, 0, \dots, 0\| + \dots + a_{2^n}\|0, 0, 0, \dots, 1\|$$

(19) $$A = a_1 \cdot \|\delta_{11}, \delta_{12}, \delta_{13}, \dots, \delta_{12^n}\| + a_2 \cdot \|\delta_{21}, \delta_{22}, \delta_{23}, \dots, \delta_{22^n}\| + \dots + \\ + a_{2^n}\|\delta_{2^n1}, \delta_{2^n2}, \dots, \delta_{2^n2^n}\|.$$

Die Matrix

(20) $$E_i^{(n)} = \|\delta_{i1}, \delta_{i2}, \dots, \delta_{i2^n}\|$$

in welcher δ_{ik} Kroneckers Delten sind, nennen wir *die hyperkomplexe Einheit.* Die Matrix (19) dürfen wir als *die hyperkomplexe Zahl*

(21) $$A = a_1E_1^{(n)} + a_2E_2^{(n)} + \dots + a_{2^n}E_{2^n}^{(n)}$$

behandeln.

14. *Aus*

(22) $$E_i^{(m)} + E_j^{(m)} = A$$

folgt

(23) $$E_i^{(n)} + E_j^{(n)} = \underbrace{[A, A, \dots, A]}_{2^{n-m} \text{ mal}}$$

für alle $m \leqslant n$ *und umgekehrt aus* (23) *folgt* (22).

Offenbar genügt es dieses für $n = m + 1$ zu beweisen und dann wird es nach dem Prinzip der vollständigen Induktion für beliebige $n \geqslant m$ folgen. Unseren Ausgangspunkt bildet die Formel

(24) $$E_i^{(m+1)} = [E_i^{(m)}, E_i^{(m)}].$$

Sie folgt aus der Formel (8) nachdem man die (α)-Definition in Acht nimmt. Aus (24) und der Eigenschaften der Quasi-diagonalen Matrizen folgt

$$E_i^{(m+1)} + E_j^{(m+1)} = [E_i^{(m)}, E_i^{(m)}] + [E_j^{(m)}, E_j^{(m)}] = [E_i^{(m)} + E_j^{(m)}, E_i^{(m)} + E_j^{(m)}].$$

Also aus

$$E_i^{(m)} + E_j^{(m)} = A$$

folgt

$$E_i^{(m+1)} + E_j^{(m+1)} = [A, A].$$

Nehmen wir in Acht (8) und (α), so sehen wir, dass auch umgekehrt aus

$$E_i^{(m+1)} + E_j^{(m+1)} = [A, A]$$

folgt

$$E_i^{(m)} + E_j^{(m)} = A.$$

Auf Grund der vollständigen Induktion folgt unser Satz.

15. ***Aus***

(25) $$E_i^{(m} \cdot E_j^{(m)} = A$$

folgt

(26) $$E_i^{(n)} \cdot E_j^{(n)} = [\underbrace{A, A, \ldots, A}_{2^{n-m} \ mal}]$$

für beliebige $n \geqslant m$ ***und umgekehrt aus*** (26) ***folgt*** (25).

Der Beweis läuft identisch, wie in 14 durch.

16. Aus 14 und 15 folgt, dass ***der Hyperkomplexe Zahlenkörper***

$$\mathfrak{K}[E_1^{(n)}, E_2^{(n)}, \ldots, E_{2^n}^{(n)}]$$

aus dem Körper mit den 2^{n-1} ***hyperkomplexen Einheiten***

$$\mathfrak{K}[E_1^{(n)}, E_2^{(n)}, \ldots, E_{2^n-1}^{(n)}]$$

durch Adjunktion der 2^{n-1} ***hyperkomplexen Einheiten***

$$E_{2^{n-1}+1}, E_{2^{n-1}+2}, \ldots, E_{2^n}$$

entsteht (Wir werden deshalb im Weiteren die oberen Indexe bei $E_i^{(n)}$ durchlassen und einfach E_i schreiben).

§ 4

Wie wir schon im vorigen Abschnitte bewiesen haben, ist das Rechnen mit den α-Matrizen vom Grade 2^n ***die Algebra*** eines Systems von 2^n hyperkomplexen Einheiten. In diesem Abschnitte werden wir das näher beleuchten. Wir werden nähmlich jetzt als ***Ausgangspunkt*** die hyperkomplexe Zahl

(27) $$x = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \ldots + a_{2^n} e_{2^n}$$

annehmen.

17. **Gleichheitsdefinition:** *Zwei hyperkomplexe Zahlen*

$$x_1 = \sum_{i=1}^{2^n} a_i e_i \quad und \quad x_2 = \sum_{i=1}^{2^n} b_i e_i$$

sind dann und nur dann gleich, wenn

$$a_i = b_i \qquad (i=1, 2, \ldots, 2^n)$$

für alle i gilt.

18. **Addition und Substraktion:** *Die Summe und der Unterschied zweier hyperkomplexen Zahlen definiert die Formel*

(28)
$$x_1 \pm x_2 = \sum_{i=1}^{2^n} (a_i \pm b_i) e_i .$$

19. **Multiplikation.** *Die Multiplikation einer hyperkomplexen Zahl mit einer reellen Konstante x erklärt die Formel*

(29)
$$kx = xk = \sum_{i=1}^{2^n} k a_i e_i .$$

Um den Produkt zweier hyperkomplexen Zahlen zu definieren benutzen wir die *Multiplikationstafel.* Die Multiplikationstafel werde wie folgt bestimmt.

Aus den 2^n hyperkomplexen Einheiten

$$e_1, e_2, e_3, \ldots, e_{2^n}$$

bilden wir eine symbolische α-Matrix. Wir schreiben zunächst die erste Zeile über der Matrix und die erste Kolonne links der Matrix

(30)

	e_1	e_2	$\ldots$	e_{2^n}
e_1	e_1	e_2	$\ldots$	e_{2^n}
$-e_2$	$-e_2$	e_1	$\ldots$	$-e_{2n-1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
$-e_{2^n}$	$-e_{2^n}$	e_{2^n-1}	$\ldots$	e_1

Das Element, welches auf der Kreuzung der i-ten Zeile und der k-ten Kolonne steht, ist dem Produkt des k-ten Elementes der linken Kolonne und des i-ten Elementes der oberen Zeile gleich.

Die Multiplikationstafel (30) berücksichtigt die *vordere* und *hintere* Multiplikation.

20. *Die Multiplikationstafel ist einzeitig eine Divisionstafel.* Wollen wir z. B.

$$e_i e_k^{-1}$$

auf Grund der Tafel (30) berechnen.

Wir nehmen in Acht, dass

$$(e_i e_k^{-1})\, e_k = e_i$$

Daraus folgt die Regel: *Wir suchen in der k-Kolonne das Element e_i* (Dieses kommt auf Grund 5. § 1 gewiss in der Kolonne mit dem Vorzeichen + oder — vor) *Kommt es in der l-ten Zeile der k-Kolonne vor, dann ist*

$$e_i e_k^{-1} = \pm e_l$$

Das Vorzeichen wählen wir gleich +, wenn

$$e_l e_k = e_i$$

ist und —, wenn

$$-e_l e_k = e_i$$

ist.

21. Wir beweisen, dass *der so definierte Zahlenkörper mit dem Zahlenkörper der 2^n-ären α-Matrizen übereinstimmt.*

Wir beweisen nähmlich den Satz:

Folgt aus der Tafel (30), *dass*

$$e_l e_k = \pm e_i,$$

dann ist auch

$$E_l E_k = \pm E_i,$$

d. h.

$$\|\delta_{l1}, \delta_{l2}, \ldots, \delta_{l2^n}\| \cdot \|\delta_{k1}, \delta_{k2}, \ldots \delta_{k2^n}\| = \pm \|\delta_{i1}, \delta_{i2}, \ldots, \delta_{i2^n}\|.$$

Den Beweis führen wir auf Grund der drei Hilfssätze:

22. Hilfssatz 1: *Es seien A und B' α-Matrizen:*

(31) *Aus* $|a_{ik}| = |a_{1l}|$ *folgt* $|a_{il}| = |a_{1k}|$

und

(32) *aus* $|a_{ik}| = |a_{1l}|$ *folgt* $|b_{ik}| = |b_{1l}|$.

Wir führen einen Rekursionsbeweis durch:

Für die α-Matrizen vom Grade 2 stellen wir die Richtigkeit des Hilfssatzes unmittelbar fest.

Wir nehmen an, dass (31) und (32) für die α-Matrizen vom Grade 2^{n-1} erfüllt sind und beweisen diese Formeln für die α-Matrizen A und B' vom Grade 2^n.

Aus der Annahme folgt, dass (31) für die Elemente a_{ik} der Matrix A erfüllt ist, wenn $i, k=1, 2, \ldots, 2^{n-1}$.

Wir betrachten die Elemente a_{ik}, wenn $i=1, 2, \ldots, 2^{n-1}$, $k=2^{n-1}+1, \ldots, 2^n$. Es sei

(33) $$|a_{i,2^{n-1}+k}| = |a_{1,2^{n-1}+l}| \qquad (0<l\leqslant 2^{n-1}).$$

Aus der Tatsache, dass $(A^{(2)})'$ eine α-Matrix ist und aus (32) für die Matrizen $A^{(2)}$ und $A^{(1)}$ folgt (Wir setzen $A=A^{(1)}$; $B=A^{(2)}$)

(34) $$|a_{ik}| = |a_{1l}|.$$

Aus (31) für die Matrix $A^{(1)}$ und (34) folgt

(35) $$|a_{il}| = |a_{1k}|.$$

Aus (32) für die Matrizen $A^{(1)}$ und $A^{(2)}$ und (35) folgt

(36) $$|a_{l,2^{n-1}+l}| = |a_{1,2^{n-1}+k}|.$$

Aus (33) und (36) folgt, dass (31) für die Elemente a_{ik} der Matrix A richtig ist, wenn $i=1, 2, \ldots, 2^{n-1}$, $k=2^{n-1}+1, \ldots, 2^n$.

Wir erwägen jetzt die Elemente a_{ik}, wenn $i=2^{n-1}+1, \ldots, 2^n$, $k=1, 2, \ldots, 2^{n-1}$. Wir sollen beweisen, dass aus

$$|a_{2^{n-1}+l,k}| = |a_{1,2^{n-1}+l}|$$

folgt

$$|a_{2^{n-1}+l,2^{n-1}+l}| = |a_{1k}|.$$

Also einzeitig erledigen wir schon den Fall $i, k=2^{n-1}+1, \ldots, 2^n$. Es sei

(37) $$|a_{2^{n-1}+i,k}| = |a_{1,2^{n-1}+l}|.$$

Aus (32) für $A^{(3)}$ und $A^{(1)}$ ($A=A^{(1)}$, $B=A^{(3)}$) und (37) folgt

(38) $$|a_{ik}| = |a_{1,l}|.$$

Aus (31) für $A^{(1)}$ und (38) folgt

(39) $$|a_{il}| = |a_{1k}|.$$

Aus (32) für $A^{(1)}$ und $A^{(3)}$ und (39) folgt

(40) $$|a_{2^{n-1}+l,l}| = |a_{1,2^{n-1}+k}|.$$

Aus

$$A^{(3)} = -A^{(2)}$$

(der (α)-Bedingung) und (40) folgt

(41) $$|a_{2^{n-1}+l,l}| = |a_{l,2^{n-1}+l}|.$$

Aus (40) und (41) folgt

(42) $$|a_{1,2^{n-1}+k}| = |a_{l,2^{n-1}+l}|.$$

Aus (32) für $A^{(1)}$ und $A^{(2)}$ und (42) folgt

(43) $$|a_{1k}| = |a_{ll}|$$

Aus

$$A^{(1)} = A^{(4)}$$

und (43) folgt

(44) $$|a_{2^{n-1}+l,2^{n-1}+l}| = |a_{1k}|$$ w. z. b. w.

Wir haben also die Formel (31) bewiesen. Den leichten Rekursionsbeweis für die Formel (32) übergehen wir.

23. Hilfssatz 2: *Sind A und B' α-Matrizen vom Grade 2^n, so ist*

(45) $$b_{ii} = b_{11} \quad \textit{für} \quad i=1, 2, \ldots, 2^{n-1},$$

(46) $$b_{ii} = -b_{11} \quad \textit{für} \quad i=2^{n-1}+1, \ldots, 2^n$$

und

(47) $$a_{ii} = a_{11} \quad \textit{für} \quad i=1, 2, \ldots, 2^n.$$

Wir verzichten auf den leichten Rekursionsbeweis.

24. Hilfssatz 3: *Es sei A eine α-Matrix mit nichtnegativen Zahlen in der ersten Zeile.*

Ist

$$a_{1k} = a_{k1},$$

so behaupten wir, dass aus

$$a_{ik} = \mp a_{1l}$$

die Gleichheit

$$a_{il} = \mp a_{1k}$$

folgt. Ist dagegen

$$a_{1k} = -a_{k1},$$

dann wird aus

$$a_{ik} = \mp a_{1l}$$

die Gleichheit

$$a_{il} = \pm a_{1k}$$

folgen. Wir führen einen Rekursionsbeweis durch.

Für die binären α-Matrizen stellen wir gleich die Richtigkeit unserer Behauptung fest.

Wir nehmen an, dass unsere Behauptung für die 2^{n-1}-ären α-Matrizen richtig ist und betrachten die α-Matrix A vom Grade 2^n.

a. Aus der Annahme folgt, dass unsere Behauptung für die Elemente a_{ik} der Matrix A richtig ist, wenn

(a) $$i, k = 1, 2, ..., 2^{n-1}.$$

b. Wir betrachten die Matrix $A^{(2)}$. $(A^{(2)})'$ ist eine α-Matrix vom Grade 2^{n-1}.

Ist $a_{i,2^n} = a_{1,2^n-i+1}$, so folgt bei unserer Annahme aus

$$a_{i,2^{n-1}+k} = \mp a_{1,2^{n-1}+l}$$

die Gleichheit

$$a_{i,2^{n-1}+l} = \mp a_{1,2^{n-1}+k}.$$

Ist dagegen

$$a_{i2^n} = - a_{1,2^n-i+1},$$

so folgt (auf Grund unserer Annahme) aus

$$a_{i,2^{n-1}+k} = \mp a_{1,2^{n-1}+l}$$

die Formel

$$a_{i,2^{n-1}+l} = \pm a_{1,2^{n-1}+k}.$$

Aus der Voraussetzung dass die Elemente in der ersten Zeile von A positiv sind und aus der Bemerkung, dass $A^{(1)}$ und $(A^{(2)})'$ α-Matrizen sind folgt, dass a_{i1} zusammen mit a_{i2^n} positiv und a_{i1} zusammen mit a_{i2^n} negativ ist.

Daraus folgt der Hilfssatz 3 für die Elemente a_{ik} der Matrix A, wenn

(b) $$i = 1, 2, ..., 2^{n-1}, \qquad k = 2^{n-1} + 1, ..., 2^n.$$

c. Wir betrachten jetzt die Matrizen $A^{(3)}$ und $A^{(4)}$.

Es sei

(48) $$a_{2^{n-1}+i,1} = a_{1,2^{n-1}+i}$$

Aus $A^{(3)} = -A^{(2)}$ und (48) folgt

(49) $$a_{2^{n-1}+i,1} = -a_{2^{n-1}+1,i}.$$

Betrachten wir den Fall $0 < i \leqslant 2^{n-2}$, so folgt aus dem Hilfssatze 2, (47) nachdem man in Acht nimmt, dass $(A^{(3)})'$ eine α-Matrix ist,

(50) $$a_{2^{n-1}+i,i} = -a_{2^{n-1}+1,1}.$$

Aus der Annahme, dass der Hilfssatz 3 für die α-Matrizen vom Grade 2^{n-1} richtig ist und aus (49) und (50) folgt

(51) $$a_{2^{n-1}+i,2^{n-1}} = -a_{2^{n-1}+1,2^{n-1}-i+1}.$$

Ist

(52) $$a_{2^{n-1}+i,k} = \pm a_{1,2^{n-1}+i}$$

so folgt aus $A^{(3)} = -A^{(2)}$

(53) $$a_{2^{n-1}+i,k} = \mp a_{2^{n-1}+1,i}.$$

Aus unserer Annahme und (51) folgt

(54) $$a_{2^{n-1}+i,i} = \pm a_{2^{n-1}+1,k}.$$

Vergleichen wir $A^{(3)}$ und $A^{(4)}$ so folgt aus (54)

(55) $$a_{2^{n-1}+i,2^n-i+1} = \pm a_{2^{n-1}+1,2^n-k+1}.$$

Aus $0 < i \leqslant 2^{n-2}$ folgt, dass die Elemente, die in (55) auftreten zu einer der Matrizen $A^{(41)}$ oder $A^{(42)}$ gehören.

Vergleichen wir die zwei Matrizen $A^{(41)}$ und $A^{(42)}$ ($(A^{(41)})'$ und $A^{(42)}$ sind α-Matrizen) so folgt aus (55)

(56) $$a_{2^{n-1}+i,2^{n-1}+i} = \pm a_{2^{n-1}+1,2^{n-1}+k} = \pm a_{1k}$$

Aus (48), (52) und (56) folgt der Hilfssatz 3 für die Elemente a_{ik} der Matrix A, wenn

(c) $$i = 2^{n-1}+1, \ldots, 2^{n-1}+2^{n-2}, \quad k = 1, \ldots, 2^n$$

und wenn

$$a_{2^{n-1}+i,1} = a_{1,2^{n-1}+i}.$$

Ähnlich läuft der Beweis im Fall (c), wenn

$$a_{2^{n-1}+i,1} = -a_{1,2^{n-1}+i}.$$

Damit haben wir den Fall (c) erledigt.

d. Es sei

(57) $$a_{2^{n-1}+i,1} = a_{1,2^{n-1}+1} \qquad (2^{n-2} < i \leqslant 2^{n-1}).$$

Ähnlich wie in *c*, erhalten wir nacheinander die Formeln

(58) $$a_{2^{n-1}+i,1} = -a_{2^{n-1}+1,i}$$
(59) $$a_{2^{n-1}+i,i} = -a_{2^{n-1}+1,1}$$
(60) $$a_{2^{n-1}+i,2^{n-1}} = a_{2^{n-1}+1,2^{n-1}-i+1}$$
(61) $$a_{2^{n-1}+i,k} = \pm a_{1,2^{n-1}+i}$$
(62) $$a_{2^{n-1}+i,k} = \mp a_{2^{n-1}+1,i}$$
(63) $$a_{2^{n-1}+i,i} = \mp a_{2^{n-1}+1,k}$$
(64) $$a_{2^{n-1}+i,2^n-i+1} = \mp a_{2^{n-1}+1,2^n-k+1}$$

Die Elemente, die in (64) auftreten, gehören einer der Matrizen $A^{(43)}$ oder $A^{(44)}$. Das Vorzeichen der Elemente in der ersten Zeile von $A^{(43)}$ ist dem Vorzeichen der Elemente in der ersten Zeile in $A^{(44)}$ entgegengesetzt. Daraus folgt, dass die Vorzeichen der Elemente der Matrizen $(A^{(43)})'$ und $A^{(44)}$ nicht übereinstimmen.

(65) $$\operatorname{sgn}(a_{ik}^{(43)})' \cdot \operatorname{sgn} a_{ik}^{(44)} \leqslant 0$$

(wo $\operatorname{sgn} x = 1$ ist, wenn $x > 0$; $\operatorname{sgn} x = 0$, wenn $x = 0$ und $\operatorname{sgn} x = -1$, wenn $x < 0$). (65) folgt daraus, dass $(A^{(43)})'$ und $A^{(44)}$ α-Matrizen sind und das Vorzeichen der Elemente $a_{1k}^{(44)}$ ist $+$, dagegen das Vorzeichen der Elemente $a_{1k}^{(43)}$ ist $-$, denn $a_{1k} \geqslant 0$ nach der Voraussetzung des Hilfssatzes 3.

Also aus (64) und (65) folgt

(66) $$a_{2^{n-1}+i,2^{n-1}+i} = \pm a_{2^{n-1}+1,2^{n-1}+k} = \pm a_{1k}.$$

Aus (57), (61) und (66) folgt der Hilfssatz 3, für die Elemente a_{ik} der Matrix A, wenn

(d) $$i = 2^{n-1} + 2^{n-2} + 1, \ldots, 2^n, \qquad k = 1, 2, \ldots, 2^n$$
bei
$$a_{i1} = + a_{1i}$$

Identisch läufen die Rechnungen bei

$$a_{i1} = - a_{1i}$$

Fassen wir zusammen die Resultate (a), (b), (c), (d), so sehen wir, dass der Hilfssatz 3 vollständig bewiesen ist.

25. Wir kommen jetzt auf den Beweis des Satzes 21.

Steht in der symbolischen Matrix (30) auf der Kreuzung der i-ten Zeile und der k-Kolonne das Element e_l, so folgt aus dem ersten Hilfssatze, dass auf der Kreuzung der i-Zeile und l-Kolonne das Element e_k steht. Sollen wir $\|\delta_{l1}, \delta_{l2}, \dots, \delta_{l2^n}\|$ mit $\|\delta_{k1}, \delta_{k2}, \dots, \delta_{k2^n}\|$ multiplizieren, dann genügt es (auf Grund 3, § 1) die Elemente der ersten Zeile des Produktes zu bestimmen. In der ersten Zeile von $\|\delta_{l1}, \delta_{l2}, \dots, \delta_{l2^n}\|$ steht nur ein Element, welches von Null verschieden ist, nähmlich das Element $\delta_{ll} = 1$. Multiplizieren wir $\|\delta_{l1}, \dots, \delta_{l2^n}\|$ mit $\|\delta_{k1}, \dots, \delta_{k2^n}\|$, dann erhalten wir in der ersten Zeile des Produktes nur dann eine von Null verschiedene Zahl, wenn in der entsprechenden Kolonne in der i-ten Zeile der α-Matrix $\|\delta_{k1}, \dots, \delta_{k2^n}\|$ ein nicht verschwindendes Element steht. Auf Grund 5 § 1 gibt es in der i-ten Zeile der α-Matrix $\|\delta_{k1}, \dots, \delta_{k2^n}\|$ nur ein von Null verschiedenes Element und dieses ist $+1$ oder -1 gleich. Aus dem Hilfssatze 1 (auf die α-Matrix $\|\delta_{k1}, \dots, \delta_{k2^n}\|$ angewendet) folgt, dass das nichtverschwindende Element in der i-ten Zeile genau in der l-Kolonne sich befindet.

Wir gelangen also zum Resultat, dass entweder

$$E_l E_k = E_\iota$$

oder

$$E_l E_k = -E_\iota$$

ist.

Das Vorzeichen bei E_ι stellen wir auf Grund des Hilfssatzes 3 fest. Nehmen wir noch in Acht, dass wir in der Tafel (30) die erste Kolonne links der Tafel geschrieben haben, so folgt, dass das Vorzeichen bei dem Produkt E_ι richtig bestimmt ist (Hilfssatz 3) und damit ist der Satz 21 bewiesen.

§ 5

26. Betrachten wir die *binären α-Matrizen*, so bemerken wir, dass sie *die gewöhnlichen Komplexen Zahlen* darstellen

$$z = \left\| \begin{matrix} x & y \\ -y & x \end{matrix} \right\|.$$

Die imaginäre Einheit ist durch die Matrix

$$\left\| \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} \right\|$$

dargestellt.

27. Betrachten wir die α-Matrizen vom Grade 4, so bemerken wir, dass sie *die Quaternionen*

$$q = \left\| \begin{matrix} x & y & z & t \\ -y & x & t & -z \\ -z & -t & x & y \\ -t & z & -y & x \end{matrix} \right\|$$

darstellen[1]).

28. Wir werden jetzt zeigen, dass *die in* §§ 1, 2, 3, 4 *erwähnten Zahlensysteme mit den Clifford-Lipschitzschen übereinstimmen.* Um das einzusehen, sollen wir für jedes Matrizensystem vom Grade 2^n die n Primitiveinheiten bestimmen.

Wir beweisen, dass *jede Einheit* E_{2^k} $(k=1, 2, ..., n)$ *eine Primitiveinheit ist.*

Dieser Satz folgt aus den drei Bemerkungen:

(a) $(E_{2^k})^2 = -1 \qquad (k=1, 2, ..., n)$

(b) $E_{2^k} \cdot E_{2^l} = -E_{2^l} \cdot E_{2^k} \qquad (i, k = 1, 2, ..., n;\ i \neq k)$

(c) *Die Adjuktion von* E_{2^n+1} *zum Matrizensystem vom Grade* 2^n *zieht die Einführung aller Einheiten* E_j $(j=2^n+1, ..., 2^{n+1}-1)$ *mit.*

29. Um (a) zu beweisen benützen wir die Multiplikationstafel (30).

Wir bemerken, dass in den α-Matrizen

(67) $$a_{2^k,1} = -a_{1,2^k}$$

ist (Das folgt aus dem Hilfssatze 2 (23, § 4)).

Aus (67) und der Multiplikationstafel (30) folgt

$$-E_{2^k} \cdot E_{2^k} = 1.$$

Damit ist (a) bewiesen.

30. Wir kommen auf den Beweis von (b). Es ist (Satz 4, § 1)

$$|a_{2^k,2^n}| = |a_{2^n,2^k}|.$$

Wir sollen jetzt das Vorzeichen feststellen. Es ist

(68) $$a_{2^k,2^n} = -a_{1,2^n-2^k+1} \qquad \text{für} \qquad k<n.$$

---

[1]) Das hat schon J. Brill in Proc. Lond. Math. Soc. II. Vol. 4 (1906) S. 124 angegeben.

Betrachten wir nähmlich eine α-Matrix A vom Grade 2^n, so sind auch die beiden Matrizen $A^{(1)}$ und $(A^{(2)})'$ vom Typus α. Es folgt deshalb aus

(67) $$a^{(1)}_{2^k,1} = - a^{(1)}_{1,2^k}$$

dass auch

(69) $$(a^{(2)}_{2^k,1})' = - (a^{(2)}_{1,2^k})'$$

ist.

Aus (69) folgt

$$a_{2^k,2^n} = - a_{1,2^n-2^k+1}.$$

Ebenso erhalten wir

(70) $$a_{2^n,2^k} = + a_{1,2^n-2^k+1} \quad \text{für} \quad k < n.$$

Aus (68) und (70) folgt

(71) $$a_{2^n,2^k} = - a_{2^k,2^n}.$$

Aus (71) und der Multiplikationstafel (30) folgt

(b) $$E_{2^n} E_{2^k} = - E_{2^k} E_{2^n} \qquad (k \neq n).$$

Damit ist (b) bewiesen.

31. Um (c) zu beweisen bemerken wir, dass der Multiplikationstafel nach $E_{2^n} E_i$ $(i < 2^n)$ entweder E_{2^n-i+1} oder $-E_{2^n-i+1}$ gleich ist. Daraus folgt, dass die Adjunktion der Einheit E_{2^n} zum Körper

$$\mathfrak{K}(E_1, E_2, \ldots, E_{2^n-1})$$

die Adjunktion der 2^{n-1} Einheiten

$$E_{2^{n-1}+1}, \ldots, E_{2^n}$$

fordert.

Daraus folgt, dass *die α-Matrizen-Systeme mit den Systemen von Clifford-Lipschitz übereinstimmen.*

Quelques théorèmes sur les séries orthogonales

par

J. Marcinkiewicz (Wilno)

1. Cette note contient trois parties différentes. Dans la première je démontre certaines propriétés du système orthogonal de Haar. Dans la deuxième partie, je généralise un résultat concernant les séries lacunaires. Dans la dernière partie je donne un théorème général sur l'unicité de séries orthogonales.

2. Posons

(2.1) $$\varphi_{n-1}(x) = \text{sign} \sin 2^n \pi x \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

(2.2) $$\psi_0(x) \equiv 1; \ \psi_n(x) = \varphi_{n_1}\varphi_{n_2}\varphi_{n_3}\ldots\varphi_{n_n}$$

où

(2.3) $$n > 0; \quad n = 2^{n_1} + 2^{n_2} + \ldots + 2^{n_\nu}, \quad n_1 > n_2 > n_3 > \ldots n_\nu.$$

Désignons encore par $H_{n,m}$ la fonction égale à $\sqrt{2^{n-1}}$ et $-\sqrt{2^{n-1}}$ dans les segments $(2(m-1)2^{-n}, (2m-1)2^{-n})$ et $((2m-1)2^{-n}, 2m2^{-n})$ et égale à zéro en dehors de ces deux intervalles. Les fonctions φ_n, ψ_n et $H_{n,m}$ sont respectivement les fonctions de Rademacher[1]) de Walsh[2]) et de Haar[3]).

Paley a démontré le suivant

Théorème[4]): *Soit*

(2.4) $$f \in L^r \ (r > 1); \quad f = \sum a_\nu \psi_\nu$$

(2.5) $$\Delta_0 = a_0; \quad \Delta_\nu = \sum_{\mu=2^{\nu-1}}^{2^\nu-1} a_\mu \psi_\mu, \quad \nu > 0.$$

---

[1]) Rademacher 10. [2]) Walsh 12. [3]) Haar 1. [4]) Paley 9.

On a

(2.6) $$A_r\int_0^1\{\sum_0^\infty \Delta_\nu^2\}^{r/2}dx \leqslant \int_0^1 |f|^r\,dx \leqslant B_r\int_0^1\{\sum_0^\infty \Delta_\nu^2\}^{r/2}dx$$

où A_r et B_r sont des constantes positives.

Je vais démontrer un résultat analogue pour le système de Haar. On a le

Théorème 1.[1]) *Soit*

(2.7) $$f \in L^r\,(r>1)$$

(2.8) $$f = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{2^{n-1}} a_{n,m}H_{n,m}.$$

On a

(2.9) $$A_r\int_0^1\{a_0^2+\sum_{n,m}a_{n,m}^2H_{n,m}^2\}^{r/2}dx \leqslant \int_0^1|f|^r dx \leqslant B^r\int_0^1\{a_0^2+\sum_{n,m}a_{n,m}^2H_{n,m}^2\}^{r/2}dx.$$

La démonstration est presque immédiate. En effet, posons

(2.10) $$f=\Sigma\Delta_\nu;\quad \Delta_0=c_0;\quad \Delta_\nu=\sum_{\mu=2^{\nu-1}}^{2^\nu-1}c_\mu\psi_\mu.$$

Si l'on développe les fonctions Δ_ν selon le système de Haar on obtient

(2.11) $$\Delta_n=\sum_{m=1}^{2^{n-1}}a_{n,m}H_{n,m}$$

de sorte que

(2.12) $$\Delta_n^2=\sum_{m=1}^{2^{n-1}}a_{n,m}^2H_{n,m}^2.$$

Les formules (2.6), (2.10) et (2.12) donnent (2.9).

Théorème 2. *Si la série*

$$a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{2^{n-1}}a_{n,m}H_{n,m}$$

représente une fonction de la classe L^r $(r>1)$, il en est de même pour la série

$$\lambda_0a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{2^{n-1}}\lambda_{n,m}a_{n,m}H_{n,m}$$

dès que la suite $\{\lambda_{n,m}\}$ est bornée.

---

[1]) Pour les relations mutuelles entre les théorèmes 1—5 voir Orlicz 1.

Théorème 3. *Désignons par H_ν les fonctions de Haar prises dans un ordre arbitraire. Soient*

$$f = \Sigma a_\nu H_\nu ; \quad f \in L^r (r > 1). \tag{2.13}$$

La série (2.13) *converge fortement*[1]).

La démonstration de ces deux théorèmes résulte facilement de la formule (2.9). La même formule donne aussi le

Théorème 4. *Soient*

$$\begin{matrix} f \in L^p (p > 1); & f = \Sigma a_\nu H_\nu \\ g \in L^q (q > 1), & g = \Sigma b_\nu H_\nu \end{matrix} \qquad 1/p + 1/q = 1.$$

La série

$$\Sigma a_\nu b_\nu$$

converge absolument.

C'est une conséquence immédiate du théorème 2.

On a enfin le

Théorème 5. *Il est possible de choisir une suite croissante $\{n_\nu\}$ de nombres entiers de sorte que l'on ait*

$$\int_0^1 |S^*|^r dx \leqslant A_r \int_0^1 |f|^r dx \tag{2.14}$$

où

$$S^* = \max |\sum_1^{n_\nu} a_\mu H_\mu|; \quad f \in L^r; \quad f = \sum_1^\infty a_\nu H_\nu \qquad (r > 1).$$

Es effet, rangeons les fonctions $H_{n,m}$ comme il suit: $H_0, H_{1,1}, H_{2,1}, H_{2,2}, H_{3,1} \ldots$ et désignons les fonctions ainsi obtenues par $\bar{H}_0, \bar{H}_1, \bar{H}_2, \bar{H}_3, \ldots$ Choisissons la suite $\{n_\nu\}$ de sorte que le plus petit indice des fonctions $\bar{H}_\nu$ dans le groupe

$$\sum_{n_\nu}^{n_{\nu+1}} a_\mu H_\mu$$

surpasse le plus grand indice des fonctions $\bar{H}_\nu$ dans le groupe

$$\sum_{n_{\nu-2}}^{n_{\nu-1}} a_\mu H_\mu .$$

---

[1]) Cf. aussi J. Schauder 11.

D'après le théorème 1 on voit que les séries

$$\Sigma \Delta_{2\nu+1}; \quad \Sigma \Delta_{2\nu},$$

où l'on a posé

$$\Delta_\nu = \sum_{\mu=n_{\nu-1}}^{n_\nu - 1} a_\mu H_\mu,$$

réprésentent des fonctions de la classe L^r. On a d'une façon évidente

$$\max_\nu |\sum_1^\nu \Delta_{2\mu+1}| \leqslant \max_\nu |S'_\nu|; \quad \max_\nu |\sum_1^\nu \Delta_{2\mu}| \leqslant \max_\nu |S''_\nu|$$

où S'_ν et S''_ν sont les sommes partielles des séries

$$\Sigma c'_\nu \overline{H}_\nu = \Sigma \Delta_{2\nu+1}; \quad \Sigma c''_\nu \overline{H}_\nu = \Sigma \Delta_{2\nu}.$$

On voit que tout revient à démontrer le

Lemme 1. *Soit*

$$f \epsilon L^r; \quad f = \Sigma a_\nu \overline{H}_\nu; \quad S_\nu = \sum_0^\nu a_\nu \overline{H}; \quad S^* = \max_\nu |S_\nu|.$$

On a

$$\int_0^1 |S^*|^r dx \leqslant A_r \int_0^1 |f|^r dx.$$

Ce lemme est sûrement connu, quoiqu'il soit difficile de dire s'il a été formulé explicitement dans la littérature. En tout cas, on peut l'obtenir d'un théorème de M.M. G. Hardy et J. Littlewood[1]) par le même raisonnement dont s'est servi Paley[2]) pour obtenir un résultat analogue relatif au système de Walsh. Je laisse les calculs au lecteur.

3. Dans une note anterieure[3]) j'ai démontré le

Théorème. *Soit donné un système orthogonal et normal dans l'intervalle* (0, 1) *satisfaisant à la condition suivante*

(3.1) $$\limsup_{n\to\infty} \int_0^1 |\varphi_n(x)| dx > 0.$$

---

[1]) Hardy et Littlewood 2. [2]) Paley 9, spéc. th. 1, p. 246.

[3]) Marcinkiewicz 3. Pour le théorème réciproque voir Marcinkiewicz 3, 4, 5 et 6.

On peut choisir une suite $\{\varphi_{n_\nu}\}$ *de sorte que la convergence presque partout de la série*

(3.2) $$\Sigma a_\nu \varphi_{n_\nu}(x)$$

entraîne la relation

(3.3) $$\Sigma a_\nu^2 < \infty.$$

Dans la note présente je vais démontrer un théorème plus fort, à savoir le

Théorème 6. *Dans l'hypothèse* (3.1) *on peut choisir une suite* $\{\varphi_{n_\nu}\}$ *de sorte qu'une série quelconque* (3.2) *satisfaisant presque partout à la condition suivante*

(3.4) $$\liminf_{n\to\infty} S_n(x) > -\infty, \quad \text{où} \quad S_n(x) = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \varphi_{n_\nu}(x).$$

satisfasse aussi à la condition

(3.5) $$\Sigma a_\nu^2 < \infty$$

La démonstration est basée sur deux lemmes.

Lemme 1. *Dans l'hypothèse* (3.1) *il est possible de définir une suite* $\{\varphi_{n_\nu}\}$ *extraite de la suite* $\{\varphi_n\}$, *un ensemble* K, *un système orthogonal et normal* $\{\psi_\nu\}$ *et une constante* a *de sorte que l'on ait*

(3.6) $$|K| > 0,$$

(3.7) $$\sum_k |\underset{x}{E}(\psi_k(x) \neq a\varphi_{n_k}(x))(x \in K)| < \infty,$$

(3.8) $$\int_0^1 \psi_k \psi_{k'} dx = 0 \quad (k \neq k') \quad \psi_k(x) = 0, \quad x \in CK, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Pour chaque ensemble A, $|AK| > 0$

(3.9) $$\liminf_{k\to\infty} \int_A \psi_k^2(x)\, dx > 0.$$

On a enfin

(3.10) $$\int_0^1 \psi_{ik}\psi_{i'k'} dx = \begin{cases} 1 & \textit{pour } (i,k) = (i',k') \\ 0 & \text{«} \quad (i,k) \neq (i',k') \end{cases}$$

où l'on a posé

$$\psi_{i,k} = \psi_i \psi_k \qquad (i < k).$$

Ce lemme est connu[1]).

[1]) Marcinkiewicz 3.

Lemme 2. *Les fonctions* $\{\psi_k\}$ *jouissant de propriétés* (3.6), (3.8), (3.9), (3.10), *il est possible de définir deux nombres positifs* ε *et* A *de sorte que l'on ait pour chaque ensemble* E, $|EK|>|K|-\varepsilon$ *et chaque suite* $\{a_\nu\}$

$$\int_E |\sum a_i\psi_i|\,dx \geqslant A\,(\sum a_i^2)^{1/2}. \tag{3.11}$$

Ce lemme est aussi connu, je l'ai démontré dans un travail commun avec M. A. Zygmund[1]). Ce lemme y est formulé pour les fonctions dites indépendantes, mais la démonstration n'exige que les propriétés énoncées plus haut.

Maintenant il est facile de démontrer le théorème[2]). Supposons qu'une série quelconque

$$\sum a_\nu \varphi_{n_\nu} \tag{3.12}$$

où les fonctions $\{\varphi_{n_\nu}\}$ vérifient les conditions du lemme 1 satisfait à la condition (3.4). On conclut facilement que la série

$$\sum a_\nu \psi_\nu \tag{3.13}$$

satisfait aussi à la même condition. Il en résulte l'existence d'un nombre positif M tel que

$$S_n(x) \geqslant -M; \quad x \in E; \quad |EK| > |K| - \varepsilon; \qquad n = 1, 2, \dots \tag{3.14}$$

où $S_n(x)$ désignent les sommes partielles de la série (3.13).

Supposons que

$$\sum a_\nu^2 = \infty. \tag{3.15}$$

D'après (3.11), on obtient

$$\int_E |S_n(x)|\,dx \geqslant A\,(\sum_1^n a_i^2)^{1/2} \tag{3.16}$$

D'autre part, en tenant compte de (3.14), on conclut

$$\int_E |S_n|\,dx \leqslant \int_E |S_n + M|\,dx + \int_E M\,dx = \int_E S_n\,dx + 2M|E| = \sum_1^n a_\nu \xi_\nu + 2\,M|E|$$

$$\xi_\nu = \int_E \psi_i\,dx.$$

Or, comme

$$\sum \xi_\nu^2 < \infty,$$

[1]) Marcinkiewicz et Zygmund 7, th. 2.

[2]) Comparer ici Zygmund 13.

on en déduit d'après (3.15)

$$\int_E |S_n|\, dx = o\big(\sum_1^n a_\nu^2\big)^{1/2},$$

ce qui est impossible en vertu de (3.16).

4. La théorie de l'unicité de séries orthogonales n'est développée que pour systèmes tout-à-fait particuliers. Je vais donner ici quelques théorèmes généraux.

Théorème 7. *Soit* $\{\varphi_n\}$ *un système orthogonal, normal et complet dans l'intervalle* $(0, 1)$. *Il est possible de construire une série non-nulle*

$$\sum a_\nu \varphi_\nu$$

et une suite $\{n_\nu\}$ *de sorte que la suite des sommes partielles*

$$S_{n_\nu}(x) = \sum_1^{n_\nu} a_\mu \varphi_\mu(x)$$

converge presque partout vers zéro.

Je vais donner deux démonstrations différentes de ce théorème. La première d'elles est très intuitive, la seconde a l'avantage de pouvoir être appliquée à la démonstration du

Théorème 8. *Supposons que le système* $\{\varphi_n\}$ *vérifie les conditions du théorème 7 ainsi que la condition suivante*

$$|\varphi_n(x)| \leqslant M; \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1; \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Il existe une série non-nulle et à coefficients tendant vers zéro,

$$\sum a_\nu \varphi_\nu$$

et une suite $\{n_\nu\}$ *telle que la suite*

$$S_{n_\nu}(x) = \sum_1^{n_\nu} a_\mu \varphi_\mu(x)$$

converge presque partout vers zéro.

Lemme 1. *Soient*

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$$

n fonctions orthogonales et normales, ε un nombre positif et $a_1, a_2, \ldots, a_n$ quelconques. Il existe une fonction f satisfaisant aux conditions suivantes

$$(4.1) \qquad |\underset{x}{E}(f \neq 0)| < \varepsilon; \quad f \in L^2,$$

$$(4.2) \qquad \int_0^1 f \varphi_i \, dx = a_i \qquad i=1, 2, 3, \ldots, n.$$

Posons

$$(4.3) \qquad s \int_{k/s}^{(k+1)/s} \varphi_i \, dx = \varphi_i^{(s)} \quad (k/s \leqslant x < (k+1)/s) \;\; k=0, 1 \ldots s-1.$$

On a

$$(4.4) \qquad \lim_s \int_0^1 (\varphi_i^{(s)} - \varphi_i)^2 \, dx = 0.$$

Il est facile de démontrer que les fonctions $\varphi_i^{(s)}$, $i=1, 2, \ldots, n$ sont linéairement indépendantes dès que s surpasse un certain nombre N. En effet, on conclut facilement de (4.4)

$$\int_0^1 \varphi_i^{(s)} \varphi_k^{(s)} \, dx \to \int_0^1 \varphi_i \varphi_k \, dx,$$

d'où il vient

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} a_{11}^{(s)} & a_{12}^{(s)} & \ldots & a_{1,n}^{(s)} \\ a_{21}^{(s)} & a_{22}^{(s)} & \ldots & a_{2,n}^{(s)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1}^{(s)} & a_{n,2}^{(s)} & \ldots & a_{n,n}^{(s)} \end{vmatrix} \to 1,$$

où

$$a_{i,k}^{(s)} = \int_0^1 \varphi_i^{(s)} \varphi_k^{(s)} \, dx,$$

ou bien pour $n > N$

$$\Delta_s \neq 0,$$

ce qui équivaut à l'indépendance linéaire des fonctions $\varphi_1^{(s)}, \varphi_2^{(s)}, \ldots, \varphi_n^{(s)}$. Il en résulte facilement l'existence d'un déterminant non-nul d'ordre n de la matrice

$$\begin{matrix} \xi_{1,1}, & \xi_{1,2}, & \ldots, & \xi_{1,s} \\ \xi_{2,1}, & \xi_{2,2}, & \ldots, & \xi_{2,s} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{n,1}, & \xi_{n,2}, & \ldots, & \xi_{n,s} \end{matrix}$$

où l'on à posé

$$\xi_{i,k} = \xi_{i,k}(s) = \varphi_i^{(s)}((2k-1)/2s).$$

Supposons par exemple que

$$\begin{vmatrix} \xi_{1,1}, & \xi_{1,2}, & \dots, & \xi_{1,n} \\ \xi_{2,1}, & \xi_{2,2}, & \dots, & \xi_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{n,1}, & \xi_{n,2}, & \dots, & \xi_{n,n} \end{vmatrix} \neq 0$$

et soit $n/s < \varepsilon$.

On peut choisir les nombres $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ de sorte que l'on ait

$$\sum_{\nu=1}^{n} \Delta_\nu \xi_{i\nu} = s a_i. \qquad i=1,2,\dots,n.$$

La fonction f égale à Δ_ν dans le segment $(\nu/s, (\nu+1)/s)$ $\nu=0,1,2,\dots,n-1$ et à zéro en dehors de ces intervalles vérifie les relations

$$\int_0^1 f\varphi_i\,dx = a_i, \qquad i=1,2,\dots,n,$$

ce qui achève la démonstration du lemme.

Par une application facile de ce lemme, on obtient facilement le

Lemme 2. *Soient f une fonction de carré sommable, $\varepsilon>0$, n un entier positif. Il existe une expression de la forme*

$$\Phi_{n,N} = \sum_{n+1}^{N} a_i\varphi_i,$$

satisfaisant à la condition suivante

$$|\underset{x}{E}(|f-\Phi_{n,N}|>\varepsilon)| < \varepsilon.$$

En effet, d'après le lemme 1, on peut modifier la fonction f dans un ensemble de mesure ne surpassant pas $\varepsilon/2$, de sorte que la fonction ainsi obtenue f^* soit orthogonale par rapport aux fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ et de carré sommable. Soit

$$f^* = \sum_{n+1}^{\infty} a_i\varphi_i.$$

En tenant compte du fait bien connu que la suite des sommes partielles d'une série étant le développement d'une fonction

de carré sommable, converge en moyenne vers cette fonction dès que le système est complet, on conclut facilement que pour N suffisamment grand, on a

$$|E(|f^*-\sum_{n+1}^{N} a_i\varphi_i|>\varepsilon)|<\varepsilon/2.$$

Or, comme les fonctions f et f^* ne diffèrent que dans un ensemble de mesure $\varepsilon/2$ au plus, on voit facilement que l'expression

$$\Phi_{n,N}=\sum_{n+1}^{N} a_i\varphi_i$$

vérifie toutes les conditions demandées.

Il est maintenant facile de démontrer le théorème 7. En effet, d'après le lemme 2, on peut choisir une expression

$$\Phi_{n_1,n_2}=\sum_{n_1+1}^{n_2} a_i\varphi_i; \qquad n_1\geqslant 1$$

de sorte que l'on ait

$$|\underset{x}{E}(|\varphi_1+\Phi_{n_1,n_2}|>\varepsilon_1)|<\varepsilon_1.$$

De même on peut choisir une expression Φ_{n_2,n_3} de la forme

$$\sum_{n_2+1}^{n_3} a_i\varphi_i$$

de sorte que la somme

$$|\varphi_1+\Phi_{n_1,n_2}+\Phi_{n_2,n_3}|$$

surpasse ε_2 dans un ensemble de mesure ε_2 au plus. D'une façon générale, on peut choisir une expression

$$\Phi_{n_k,n_{k+1}}$$

satisfaisant à la condition suivante

$$|\underset{x}{E}(|\varphi_1+\Phi_{n_1,n_2}+\ldots+\Phi_{n_k,n_{k+1}}|>\varepsilon_k)|<\varepsilon_k.$$

Si la série à terme général ε_k converge, la série

$$\Sigma\,\Phi_{n_k,n_{k+1}}$$

converge presque partout vert zéro.

La deuxième méthode de démonstration est basée sur le suivant

Lemme. *Le produit infini*

$$\prod_{\nu} (1 + a_\nu \sin 2\pi n_\nu x) \tag{4.5}$$

converge presque partout vers zéro dès que

$$a_\nu \to 0; \quad \sum a_\nu^2 = \infty; \quad n_\nu / n_{\nu+1} > 3. \tag{4.6}$$

Ce lemme est dû à M. A. Zygmund[1]).

Pour en tirer le théorème 7, supposons $n_1, n_2, \ldots, n_k$ définis et posons

$$P_k = \prod_1^k (1 + c_i \sin 2\pi n_i x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(k)} \varphi_i(x) \, c_i > 0.$$

Soit m_k un nombre choisi de sorte que l'on ait

$$|\underset{x}{E}(|\sum_m^{\infty} a_i^{(k)} \varphi_i(x)| > \varepsilon_k)| < \varepsilon_k; \qquad m \geqslant m_k.$$

Soit $n_{k+1} > m_k$ suffisament grand pour que l'on ait

$$|b_i^{(k)}| \leqslant 2^{-(k+1)} m_k^{-1}; \qquad i = 1, 2, \ldots, m_k$$

où

$$c_{k+1} \sin 2\pi n_{k+1} x \, P_k = \sum_{i=1}^{\infty} b_i^{(k)} \varphi_i(x)$$

Il est évident que les suites $\{a_i^{(k)}\}$ $i = 1, 2, \ldots$ convergent. Je vais démontrer que la série

$$\sum_i a_i \varphi_i$$

où

$$a_i = \lim_k a_i^{(k)} \qquad i = 1, 2, \ldots$$

vérifie les conditions du théorème. Dans ce but, il suffit de prouver que presque partout

$$\sum_1^{m_k} a_i \varphi_i - P_k \to 0.$$

---

[1]) Zygmund 13.

Or on a

$$\sum_{1}^{m_k} a_i\varphi_i - P_k = \sum_{1}^{m_k}(a_i - a_i^{(k)})\varphi_i - \sum_{m_k+1}^{\infty} a_i^{(k)}\varphi_i = A_k + B^k,$$

$$|\underset{x}{E}(|B_k| > \varepsilon_k)| < \varepsilon_k,$$

$$|a_i - a_i^{(k)}| \leqslant \sum_{s=k}^{\infty} |a_i^{(s)} - a_i^{(s+1)}| \leqslant 2^{-k} m_k^{-1}.$$

On peut en déduire le résultat demandé dès que

$$\sum_{\nu} \varepsilon_\nu < \infty.$$

Supposons maintenant

$$|\varphi_k(x)| \leqslant M; \quad 0 \leqslant x \leqslant 1; \qquad k=1,2,\ldots$$

Les formules

$$P_k \geqslant 0; \qquad \int_0^1 P_k(x)\,dx = 1$$

donnent d'une façon immédiate

$$|a_s^{(k)}| \leqslant M; \quad a_s = O(1).$$

Pour obtenir le résultat plus precis $a_s = o(1)$, on peut raisonner comme il suit.

On a

$$P_k = \sum_{l=1}^{k} \Phi_l$$

où

$$\Phi_l = c_l \sin 2\pi\, n_l x\, P_{l-1}.$$

Supposons $n_\nu \leqslant s < n_{\nu+1}$, $k > \nu + 1$.

On a

$$a_s^{(k)} = \sum_{1}^{k}\int_0^1 \Phi_l\varphi_s\,dx = \sum_{l=1}^{\nu-1}\int_0^1 + \int_0^1 \Phi_\nu\varphi_s\,dx + \int_0^1 \Phi_{\nu+1}\varphi_s\,dx + \sum_{\nu+2}^{k}\int =$$

$$= A_k + B_k + C_k + D_k$$

$$|B_k| \leqslant c_\nu \cdot M; \quad |C_k| \leqslant c_{\nu+1} M; \quad |D_k| \leqslant 2^{-\nu}.$$

D'autre part, $n_{\nu-1}$ étant établi, on peut choisir n_ν de sorte que l'on ait pour $s > n_\nu$, $|A| < 2^{-\nu}$. Il s'ensuit

$$|a_s^{(k)}| \leqslant M|c_\nu| + M|c_{\nu+1}| + 2^{-(\nu-1)},$$
$$|a_s| \leqslant M|c_\nu| + M|c_{\nu+1}| + 2^{-(\nu-1)},$$

ce qui donne $a_s = o(1)$.

Travaux cités

1. A. Haar. *Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme*. Math. Ann. 69 (1910) p. 331—371.

2. G. Hardy et J. Littlewood. *A maximal theorem with function-theoretic applications*. Acta Math. 54 (1930) p. 81—116.

3. J. Marcinkiewicz. *Sur les séries orthogonales lacunaires*. Apparaîtra dans le t. 7 de Stud. Math.

4. J. Marcinkiewicz. *Sur la convergence des séries orthogonales*, Stud. Math. 6 (1936), p. 39—45.

5. J. Marcinkiewicz. *Sur la sommabilité des séries orthogonales* (en polonais). Wiadomości Matematyczne 44 (1937), p. 5—16.

6. J. Marcinkiewicz. *Sur les suites d'opérations linéaires*. Stud. Math. 7 (1937).

7. J. Marcinkiewicz et A. Zygmund. *Sur les fonctions indépendantes*. Fund. Math. 29 (1937), p. 60—90.

8. W. Orlicz. *Über unbedingte Konvergenz in Funktionenräumen* (I), (II). Stud. Math. 4 (1933), p. 33—37 et 41—47.

9. R. Paley. *A remarkable series of orthogonal functions I*. Proc. Lond. Math. Soc. 34 (1932), 241—264.

10. H. Rademacher. *Einige Sätze über Reihen von allgemeinen orthogonalfunctionen*. Math. Ann. 87 (1922), 112—138.

11. J. Schauder. *Eine Eigenschaft des Haarschen Orthogonalsystems*. Math. Zeitschrift 28 (1928), 315—329.

12. J. Walsh. *Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme*. Math. Ann. 69 (1910), p. 331—371.

13. A. Zygmund. *On lacunary trigonometric series*. Trans. Americ. Math. Soc. 34_3 (1932), p. 435—446.

Sur l'appréciation des intégrales des systèmes d'équations différentielles ordinaires et de leur domaine d'existence dans le cas des variables complexes

par

T. Ważewski (Kraków)

Nous construisons, dans le présent travail[1]), une méthode permettant d'apprécier les modules des intégrales du système d'équations différentielles

$$(1) \qquad \frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, ..., y_n) \qquad (i=1, ..., n)$$

et le domaine d'existence de ces intégrales dans le cas où les fonctions f_i sont des fonctions holomorphes ***des variables complexes*** $x, y_1, ..., y_n$.

Notre méthode consiste à ramener ce problème à un problème analogue relatif à un système d'équations différentielles considérées dans le domaine des ***variables réelles*** (Théorème 1). Le passage du domaine des variables complexes à celui des variables réelles réussit grâce à un lemme élémentaire (Lemme 4, voir aussi Lemme 5).

Ce passage s'appuie au fond sur le même principe que nous avons introduit précédemment pour ramener l'appréciation des intégrales d'une équation ***aux dérivées partielles*** à l'appréciation des intégrales des équations différentielles ordinaires[2]).

---

[1]) Communiqué à la Société Polonaise de Mathématique (Section de Cracovie) le 13 mai 1937.

[2]) T. Ważewski. Sur l'unicité et la limitation des intégrales des équations aux dérivées partielles du premier ordre, Rendiconti della R. Accad. Naz. dei Lincei (1933), T. XVII, série 6, p. 372.

Notre méthode permet (*cf.* Théorème 2) d'apprécier les perturbations que subissent les intégrales du système (1) lorsqu'on remplace, dans ce système, les fonctions f_i par d'autres fonctions $f_i + \varepsilon_i(x, y_1, ..., y_n)$

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i + \varepsilon_i(x, y_1, ..., y_n). \tag{2}$$

Notre méthode peut, par conséquent, servir au ***calcul approché*** des intégrales du système (1): il suffit notamment de remplacer le système (1) par un système légèrement modifié (2) dont l'intégration exacte ou approchée serait plus facile à effectuer.

Les exemples figurant à la fin du travail montrent que notre méthode s'adapte aux calculs effectifs.

Les §§ 1, 2, 3 contiennent respectivement quelques lemmes préliminaires, les théorèmes principaux du présent travail et les exemples.

§ 1

Rappelons d'abord un lemme bien connu que l'on peut démontrer par la méthode des approximations successives.

Lemme 1. Considérons le système d'équations différentielles

$$\frac{dy_i}{dx} = g_i(x, y_1, ..., y_n), \qquad (i=1, ..., n). \tag{3}$$

Supposons que les fonctions g_i soient holomorphes dans le domaine fermé

$$|x - \hat{x}| \leqslant k, \quad |y_i - \hat{y}_i| \leqslant k, \qquad (i=1, ..., n)$$

et supposons que les inégalités

$$|g_i(x)| \leqslant N$$

(où N désigne une constante) aient lieu dans ce domaine.

Désignons par

$$y_1 = \psi_1(x), ..., \quad y_n = \psi_n(x) \tag{4}$$

une intégrale du système (3) issue d'un point quelconque du domaine

$$|x - \hat{x}| \leqslant \frac{k}{2N+1}, \quad |y_i - \hat{y}_i| \leqslant \frac{k}{2N+1}, \qquad (i=1, ... n).$$

Ceci étant supposé, l'intégrale (4) existe et est holomorphe dans le cercle

$$|x-\hat{x}|\leqslant\frac{k}{2N+1}.$$

On a, en plus, pour les points de ce cercle, les inégalités,

$$|\psi_i(x)-\hat{y}_i|\leqslant k, \qquad (i=1, ..., n).$$

Lemme 2. Nous supposons que les fonctions $f_i(x, y_1, ..., y_n)$ sont holomorphes dans le domaine

(5) $$|x-x^0|<a, \quad |y_i-y_i^0|<b_i$$

et nous désignons par

(6) $$y_1=\varphi_1(x), ..., \quad y_n=\varphi_n(x)$$

l'intégrale du système

(7) $$\frac{dy_i}{dx}=f_i(x, y_1, ..., y_n) \qquad (i=1, ..., n)$$

pour laquelle on a

$$\varphi_i(x^0)=y_i^0 \qquad (i=1, ..., n).$$

Supposons que l'intégrale (6) soit holomorphe dans le cercle

$$|x-x^0|<a'<a$$

et supposons, en plus, que les inégalités suivantes

$$|\varphi_i(x)-y_i^0|<b_i'<b_i$$

aient lieu dans ce cercle.

Cela posé, nous affirmons qu'il existe un nombre a''

$$a'<a''<a$$

tel que: 1) l'intégrale (6) soit holomorphe dans le cercle

$$|x-x^0|<a''$$

et 2) qu'on ait dans ce cercle les inégalités

$$|\varphi_i(x)-y_i^0|<b_i.$$

Démonstration. Choisissons les constantes $\bar{a}$, $\bar{b}_i$ de facon que l'on ait

$$a' < \bar{a} < a, \quad b'_i < \bar{b}_i < b_i.$$

Déterminons ensuite une constante N de manière que les inégalités

(8) $$|f_i(x, y_1, ..., y_n)| \leqslant N$$

aient lieu en tout point du domaine

(9) $$|x - x^0| \leqslant \bar{a}, \quad |y_i - y_i^0| \leqslant \bar{b}_i.$$

Soit ξ^0 un point quelconque de la circonference

(10) $$|x - x^0| = a'.$$

Soit $\{\xi_\nu\}$ une suite de points telle que

$$\xi_\nu \to \xi^0, \quad |\xi_\nu - x^0| < a'.$$

On aura $|\varphi_i(\xi_\nu) - y_i^0| < b'_i$. En remplaçant, au besoin, la suite $\{\xi_\nu\}$ par une suite partielle convenable, on pourra réaliser la convergence des suites $\{\varphi_i(\xi_\nu)\}$ et on aura

(11) $$\varphi_i(\xi_\nu) \to \eta_i^0, \quad |\eta_i^0 - y_i^0| \leqslant b'_i.$$

Déterminons le nombre $k>0$ de façon que le domaine

(12) $$|x - \xi^0| \leqslant k, \quad |y_i - \eta_i^0| \leqslant k$$

fasse partie du domaine (9). Pour un indice suffisamment grand $\nu = j$, le point

(13) $$x = \xi_j, \quad y_1 = \varphi_1(\xi_j), ..., \quad y_n = \varphi_n(\xi_j)$$

appartiendra au domaine

$$|x - \xi^0| \leqslant \frac{k}{2N+1}, \quad |y_i - \eta_i^0| \leqslant \frac{k}{2N+1}.$$

Désignons par $\psi_1(x), ..., \psi_n(x)$ l'intégrale du système (7) issue du point (13). En vertu des inégalités (8) et du Lemme 1, cette intégrale existera dans le cercle

(14) $$|x - \xi^0| \leqslant \frac{k}{2N+1}$$

et elle y remplira les inégalités $|\psi_i - \eta_i^0| \leqslant k$. On aura $\varphi_i(\xi_j) = \psi_i(\xi_j)$ $(i = 1, ..., n)$ et, par conséquent, on aura dans le cercle (14) les

identités $\varphi_i(x) \equiv \psi_i(x)$. On pourra donc prolonger l'intégrale (6) sur un voisinage du point ξ^0 lequel point a été arbitrairement choisi sur la circonférence (10). Cette observation permet de terminer la démonstration de notre lemme par un raisonnement bien connu dans la théorie du prolongement analytique.

Hypothèse H. Nous supposons que les fonctions $\sigma_i(t, u_1, ..., u_n)$ $(i=1, ..., n)$ sont continues et non négatives dans l'ensemble des points *réels* $(t, u_1, ..., u_n)$ pour lesquels on a

$$0 \leqslant t < s, \quad u_j \geqslant 0 \qquad (j=1, ..., n).$$

Nous supposons ensuite que la fonction $\sigma_i (i=1, ..., n)$ est croissante (au sens large) dans l'intervalle fermé $[0, +\infty)$ séparémemt par rapport à chacune des variables $(u_1, ..., u_{i-1}, u_{i+1}, ..., u_n)$. En supposant que $k_i \geqslant 0$ $(i=1, ..., n)$, nous désignerons par

$$u_1 = \omega_1(t, k_1, ..., k_n), ..., \quad u_n = \omega_n(t, k_1, ..., k_n)$$

l'intégrale supérieure[1]) du système

$$\frac{du_i}{dt} = \sigma_i(t, u_1, ..., u_n) \qquad (i=1, ..., n) \tag{15}$$

issue du point $t=0$, $u_1 = k_1, ...\ u_n = k_n$.

Nous supposons que cette intégrale existe dans l'intervalle $0 \leqslant t < s$.

Voici maintenant un lemme concernant la solution d'un système d'inégalités différentielles ordinaires.

Lemme 3. Adoptons l'hypothèse H et supposons que les fonctions continues

$$m_1(t), ..., m_n(t)$$

remplissent, dans l'intervalle $0 \leqslant t < s$ les inégalités

$$\overline{m}_i'(t)_+ \leqslant \sigma_i(t, m_1(t), ..., m_n(t)), \qquad (i=1, ..., n)\ ^{2)}$$

---

[1]) Pour la définition et l'existence de l'intégrale supérieure du système (15) *cf.* E. Kamke, *Zur Theorie der Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen* (Acta Math. T. 58, p. 74 s. s.). Dans le cas de l'unicité des intégrales du système (15), l'intégrale supérieure se confond avec l'intégrale au sens ordinaire.

[2]) $\overline{m}_i'(t)_+$ désigne le nombre dérivé supérieur droit de la fonction $m_i(t)$. On a $\overline{m}_i'(t)_+ = \limsup\limits_{h>0,\ h\to 0} \frac{m_i(t+h) - m_i(t)}{h}$.

et que l'on ait en plus

$$m_i(0) \leqslant k_i.$$

Cela posé, on aura, dans l'intervalle $0 \leqslant t < s$, les inégalités

$$m_i(t) \leqslant \omega_i(t, k_1, ..., k_n) \qquad (i=1, ..., n)\,[1].$$

Lemme 4. Soit $\lambda(x)$ une fonction holomorphe dans le cercle $|x-x^0| < r$ et désignons par $M(t)$ le maximum de $|\lambda(x)|$ sur la circonférence

$$|x-x^0| = t \qquad \text{(circonférence } C(t)).$$

Nous affirmons qu'il existe un point ξ, situé sur la circonférence $C(t)$, pour lequel on a

$$(16) \qquad |\xi - x^0| = t, \quad |\lambda(\xi)| = M(t), \quad \bar{M}'_+(t) \leqslant |\lambda'(\xi)|$$

où $\bar{M}'_+(t)$ désigne le nombre dérivé supérieur droit de $M(t)$[2].

Pour le démontrer, fixons l'attention sur un t quelconque et désignons par $\{t_\nu\}$ une suite de nombres pour laquelle on ait

$$t_\nu > t, \quad t_\nu \to t, \quad \frac{M(t_\nu) - M(t)}{t_\nu - t} \to \bar{M}'_+(t).$$

Il existe un point ξ_ν situé sur la circonférence $C(t_\nu)$ pour lequel on a

$$M(t_\nu) = |\lambda(\xi_\nu)|.$$

On peut supposer que la suite $\{\xi_\nu\}$ est convergente

$$\xi_\nu \to \xi.$$

Dans le cas contraire, il suffirait de remplacer la suite $\{\xi_\nu\}$ par une suite partielle convenable. Pour le ξ en question, les deux premières relations (16) subsisteront évidemment.

---

[1]) Ce lemme se rattache facilement à un théorème de M. Kamke (*loc. cit.* p. 82, Satz 9).

[2]) On pourrait facilement démontrer l'existence d'un point ξ pour lequel on ait

$$|\xi - x^0| = t, \quad |\lambda(\xi)| = M(t), \quad M'_+(t) = |\lambda'(\xi)|$$

où $M'_+(t)$ désigne la dérivée (au sens ordinaire) à droite. Une propriété analogue subsiste aussi pour la dérivée à gauche (lorsque $0 < t < r$).

Désignons par η_ν le point commun de la circonférence $C(t)$ et du segment aux extrémités x^0 et ξ_ν. On aura

$$t_\nu - t = |\xi_\nu - \eta_\nu| \leqslant |\xi_\nu - \xi|, \quad \eta_\nu \to \xi, \quad |\lambda(\eta_\nu)| \leqslant M(t)$$

et par conséquent

$$\frac{M(t_\nu) - M(t)}{t_\nu - t} \leqslant \frac{|\lambda(\xi_\nu)| - |\lambda(\eta_\nu)|}{|\xi_\nu - \eta_\nu|} \leqslant \left| \frac{\lambda(\xi_\nu) - \lambda(\eta_\nu)}{\xi_\nu - \eta_\nu} \right|$$

d'où, en passant à la limite, on obtiendra la troisième relation (16).

Voici maintenant un lemme permettant de ramener la solution d'un *système d'inégalités différentielles* considéré dans le domaine des variables *complexes* à la solution d'un *système analogue* envisagé dans le domaine des variables *réelles*.

Lemme 5. Gardons relativement aux fonctions $\sigma_i(t, u_1, ..., u_n)$ l'hypothèse H.

Supposons que les fonctions $\lambda_1(x), ..., \lambda_n(x)$ soient holomorphes dans le cercle

(17) $$|x - x^0| < s$$

et qu'elles y remplissent les inégalités différentielles

(18) $$|\lambda_i'(x)| \leqslant \sigma_i(|x - x^0|, |\lambda_1(x)|, ..., |\lambda_n(x)|) \qquad (i=1, ..., n).$$

Supposons enfin que l'on ait

$$|\lambda_i(x_0)| \leqslant k_i \qquad (i=1, ..., n),$$

où les k_i sont des constantes. Désignons par

$$M_i(t)$$

le maximum de $|\lambda_i(x)|$ sur la circonférence

$$|x - x^0| = t \qquad \text{(Circonférence } C(t)\text{)}.$$

Cela posé, nous affirmons que l'on aura les inégalités

(19) $$(\bar{M}_i'(t))_+ \leqslant \sigma_i(t, M_1(t), ..., M_n(t)) \qquad (0 \leqslant t < s)$$

(20) $$|\lambda_i(x)| \leqslant \omega_i(|x - x^0|, k_1, ..., k_n) \qquad (\text{lorsque } |x - x^0| < s)\,[1].$$

---

[1]) Pour la définition de $\omega_i(t, u_1, ..., u_n)$, *cf.* l'hypothèse H.

Démonstration. En vertu du lemme précédent, il existe sur la circonférence $C(t)$ un point ξ_i pour lequel on a

$$(21) \qquad |\lambda_i(\xi_i)| = M_i(t), \quad (\bar{M}_i'(t))_+ \leqslant |k_i'(\xi_i)|.$$

En posant dans (18) $x = \xi_i$, nous aurons

$$(22) \quad |\lambda_i'(\xi_i)| \leqslant \sigma_i(t, |\lambda_1(\xi_i)|, \ldots, |\lambda_{i-1}(\xi_i)|, M_i(t), |\lambda_{i+1}(\xi_i)|, \ldots, |\lambda_n(\xi_i)|).$$

En observant que

$$|\lambda_j(\xi_i)| \leqslant M_j(t) \qquad (j=1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n)$$

et en tenant compte de (21) et de l'hypothèse H, on voit que les inégalités (19) résultent immédiatement des inégalités (22). Observons enfin que $M_i(0) \leqslant |\lambda_i(x^0)| \leqslant k_i$ et appliquons le lemme 3 aux inégalités (19). Nous obtiendrons évidemment les inégalités

$$M_i(t) \leqslant \omega_i(t, k_1, \ldots, k_n) \qquad (0 \leqslant t < s),$$

d'où résultent immédiatement les inégalités (20).

§ 2

Théorème 1. Supposons que les fonctions $f_i(x, y_1, \ldots, y_n)$ soient holomorphes dans le domaine

$$(23) \qquad |x - x^0| < a, \quad |y_i - y_i^0| < b_i \qquad (i=1, \ldots, n)$$

et envisageons le système d'équations différentielles

$$(24) \qquad \frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \ldots, y_n) \qquad (i=1, \ldots, n).$$

Conservons l'hypothèse H relativement aux fonctions auxiliaires $\sigma_i(t, u_1, \ldots, u_n)$ et supposons que les fonctions f_i satisfassent, dans le domaine (23) aux inégalités

$$(25) \quad |f_i(x, y_1, \ldots, y_n)| \leqslant \sigma_i(|x - x^0|, |y_1 - y_1^0|, \ldots, |y_n - y_n^0|).$$

Considérons une intégrale quelconque

$$(26) \qquad x_1 = \varphi_1(x), \ldots, x_n = \varphi_n(x)$$

du système (24) et supposons que l'on ait (en désignant par $k_1, \ldots, k_n$ des constantes convenables) les inégalités

$$|\varphi_i(x^0) - y_i^0| \leqslant k_i < b_i.\ ^{1)}$$

Cela posé, nous affirmons que les propriétés suivantes A et B ont lieu:

Propriété A. Si l'intégrale (26) est holomorphe dans le cercle

$$|x - x^0| < r \leqslant \min(a, s)\ ^{2)}$$

et vérifie dans ce cercle les inégalités

$$(27) \qquad |\varphi_i(x) - y_i^0| < b_i,$$

alors ona a, dans ce cercle, les inégalités

$$(28) \qquad |\varphi_i(x) - y_i^0| \leqslant \omega_i(|x - x^0|, k_1, \ldots, k_n).$$

Propriété B. Désignons par t_i $(i=1, \ldots, n)$ la plus petite racine positive de l'équation

$$\omega_i(t, k_1, \ldots, k_n) = b_i$$

et, dans le cas où une telle racine n'existe pas, posons $t_i = +\infty$. Si les prémisses de notre théorème sont vérifiées, l'intégrale (26) existe et est holomorphe dans le cercle

$$(29) \qquad |x - x^0| < \min(a, s, t_1, \ldots, t_n)$$

et elle remplit, dans ce cercle, les inégalités (27) et (28).

Démonstration. La propriété A résulte immédiatement du lemme 5. La propriété B résulte facilement de la propriété A lorsqu'on applique le principe de prolongement présenté dans le lemme 2.

Théorème 2. Considérons deux systèmes d'équations différentielles

$$(30) \qquad \frac{dy_i}{dx} = g_i(x, y_1, \ldots, y_n) \qquad (i=1, \ldots, n),$$

$$(31) \qquad \frac{dy_i}{dx} = G_i(x, y_1, \ldots, y_n) \qquad (i=1, \ldots, n),$$

---

[1]) Le cas le plus intéressant et celui où $|\varphi_i(x^0) - y_i^0| = k_i$.

[2]) Conformément à l'hypothèse H, le nombre s est défini par la condition que l'intégrale supérieure $\omega_i(t, k_1, \ldots, k_n)$ du système auxiliaire (15) issue du point $t = 0$, $u_1 = k_1, \ldots, u_n = k_n$ existe dans l'intervalle $0 \leqslant t < s$.

où les fonctions g_i et G_i sont holomorphes dans le domaine

$$|x-x^0|<a, \quad |y_i-y_i^0|<b_i.$$

Supposons que, dans ce domaine, on ait les inégalités

$$(32)\quad |G_i(x,y_1,\dots,y_n)-g_i(x,y_1,\dots,y_n)|\leqslant\sigma_i(|x-x^0|,|y_1-y_1^0|,\dots,|y_n-y_n^0|),$$

où les fonctions $\sigma_i(t,u_1,\dots,u_n)$ satisfont à l'hypothèse H. Soient

$$y_1=\varphi_1(x),\dots,y_n=\varphi_n(x)$$
$$y_1=\psi_1(x),\dots,y_n=\psi_n(x)$$

certaines intégrales respectivement du système (30) et (31) qui sont holomorphes dans un cercle

$$|x-x^0|<a'\leqslant a,$$

qui remplissent, dans ce cercle, les inégalités

$$|\varphi_i(x)-y_i^0|<b_i, \quad |\psi_i(x)-y_i^0|<b_i$$

et pour lesquelles on a

$$|\varphi_i(x^0)-\psi_i(x^0)|\leqslant k_i$$

(où $k_1,\dots,k_n$ désignent des constantes).

Cela posé, on a les inégalités (voir les notations de l'hypothèse H)

$$|\varphi_i(x)-\psi_i(x)|\leqslant\omega_i(|x-x^0|,k_1,\dots,k_n)$$

qui sont valables dans le cercle

$$|x-x^0|<\min(a',s).$$

La démonstration découle immédiatement du lemme 5.

Ce théorème peut servir au calcul approché de l'intégrale du système (30) lorsqu'on peut indiquer:

1) un système (31) [dont les deuxièmes membres sont suffisamment voisins de ceux du système (30)] qui peut être résolu ou bien effectivement ou bien avec une erreur que l'on sait apprécier,

2) les fonctions $\sigma_i(t,u_1,\dots,u_n)$ vérifiant l'hypothèse H et telles que les inégalités (32) aient lieu et qu'en outre le système auxiliaire (15) puisse être résolu effectivement (*cf.* l'exemple 2).

§ 3

Exemple 1. Supposons que les fonctions $f_i(x, y_1, ..., y_n)$ soient holomorphes dans le domaine

$$(33) \qquad |x| < a, \quad |y_i| < b < +\infty.$$

Supposons que les inégalités

$$\left|\frac{\partial f_i(x, y_1, ..., y_n)}{\partial x}\right| \leqslant B, \qquad \left|\frac{\partial f_i(x, y_1, ..., y_n)}{\partial y_j}\right| \leqslant B$$

aient lieu dans ce domaine et que l'on ait en plus

$$|f_i(0, ..., 0)| \leqslant A$$

où A et B désignent des constantes. Désignons par

$$(34) \qquad \varphi_1(x), ..., \varphi_n(x)$$

une intégrale quelconque du système (24) pour laquelle on ait

$$\varphi_i(0) \leqslant k < b \qquad (k \text{ constant}).$$

Cela posé, nous affirmons que l'intégrale (34) est holomorphe dans le cercle

$$|x| < \min(a, t^*)$$

où

$$(35) \qquad t^* = \frac{1}{nB} \log\left(1 + \frac{(b-k)\,n^2B}{1 + An + n^2Bk}\right)$$

et que l'on a, dans ce cercle, les inégalités

$$|\varphi_i(x)| \leqslant \frac{1 + An + kn^2B}{n^2B}(e^{nB|x|} - 1) + k - \frac{|x|}{n}.$$

Remarquons pour le prouver que, dans le domaine (33), les inégalités

$$|f_i| \leqslant A + B(|x| + \sum_{\nu/1}^{n} |y_\nu|)$$

sont vérifiées. Adoptons les notations du Théorème 1 et posons

$$\sigma_i(t, u_1, ..., u_n) = A + B(t + \sum_{\nu/1}^{n} u_\nu), \quad k_i = k, \quad b_i = b.$$

Considérons le système auxiliaire (15). On vérifie facilement que l'intégrale (unique) de ce système issue du point $t=0$, $u_i=k_i$ a la forme

$$\omega_i(t, k_1, \ldots, k_n) = \frac{1+An+kn^2B}{n^2B}(e^{nBt}-1)+k-\frac{t}{n}$$

et que la racine commune des équations

$$\omega_i(t, k_1, \ldots, k_n) = b$$

est supérieure à t^* (*cf.* (35)).

En s'adressant au Théorème 1 on voit que notre assertion est juste.

Exemple 2. Supposons maintenant que les fonctions f_i soient holomorphes dans le domaine (33) et que les fonctions f_i ainsi que leurs dérivées partielles du premier ordre prennent au point $x=0$, $y_1=0, \ldots, y_n=0$ des valeurs dont les modules ne surpassent pas une certaine constante $2N$. Supposons en plus que les modules des dérivées partielles du second ordre des fonctions f_i ne surpassent $2N$ en aucun point du domaine (33). Désignons par $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ l'intégrale du système (30) pour laquelle on a

$$\varphi_i(0) = 0 \qquad (i=1, \ldots, n).$$

Posons

$$\varrho_n(t) = \frac{\operatorname{tg}(mt)+l}{1-l\operatorname{tg}(mt)}\cdot\frac{1}{nl} - \frac{t+1}{n}$$

où

$$m=\sqrt{nN(1+nN)}, \quad l=\sqrt{\frac{nN}{1+nN}}.$$

Désignons par t_n la racine de l'équation

$$\varrho_n(t)=b.$$

On aura évidemment

$$(36) \qquad 0<t_n<\frac{\pi}{2\sqrt{nN(1+nN)}}.$$

Nous affirmons que l'intégrale $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ existe et est holomorphe dans le cercle

$$(37) \qquad |x| < \min(a, t_n)$$

et que l'on a, en chaque point de ce cercle, les inégalités

$$(38) \qquad |\varphi_i(x)| \leqslant \varrho_n(|x|).$$

Afin de le démontrer, remarquons d'abord que l'on a, dans le domaine (33), les inégalités

$$|f_i(x, y_1, ..., y_n)| \leqslant N + N[1 + |x| + \sum_{\nu/1}^{n} |y_\nu|]^2 \text{ [1]}$$

qui résultent facilement des hypothèses que nous venons de faire sur les fonctions f_i.

Conservons les notations du Théorème 1 et posons

$$\sigma_i(t, u_1, ..., u_n) = N + N(1 + t + \sum_{\nu/1}^{n} u_\nu)^2, \quad k_i = 0, \quad b_i = b,$$
$$\omega_i(t, 0, ..., 0) = \varrho_n(t), \quad s = t_n, \quad t_i = t_n.$$

Nous vérifiens facilement que les prémisses du Théorème 1 sont vérifiées, d'où résulte immédiatement notre assertion.

Il est facile de voir que ni l'appréciation (38) de notre intégrale, ni l'appréciation (37) de son domaine d'existence ne peuvent être remplacées par des appréciations plus exactes, bien entendu dans les hypothèses que nous venons de faire. Il suffit, à cet effet, de poser

$$f_i = N + N(1 + x + \sum_{\nu/1}^{n} y_\nu)^2$$

et d'observer que l'on a dans ce cas $\varphi_i(x) \equiv \varrho_n(x)$.

Exemple 3. Considérons l'équation

$$\frac{dy}{dx} = g(x, y) \tag{39}$$

et supposons que la fonction $g(x, y)$ soit holomorphe dans le domaine

$$|x| < a, \quad |y| < b < +\infty. \tag{40}$$

Posons

$$g(0, 0) = A, \quad g_x(0, 0) = B, \quad g_y(0, 0) = C$$

---

[1]) Pour démontrer ces inégalités, fixons notre attention sur un point $x, y_1, ..., y_n$ quelconque du domaine (33) et posons $\lambda_i(\varrho) = f_i(x\varrho, y_1\varrho, ..., y_n\varrho)$. Le théorème de Cauchy conduit à l'égalité $\lambda_i(1) = \lambda_i(0) + \lambda_i'(0) + \int_0^1 \left[\int_0^t \lambda''(\varrho) d\varrho\right] dt.$ En exprimant $\lambda_i(1)$, $\lambda_i(0)$, $\lambda_i'(0)$, $\lambda_i''(\varrho)$ au moyen de f_i et de ses dérivées et en effectuant les intégrations le long de segments rectilignes convenables, on obtient facilement les inégalités en question.

et supposons que l'on ait

$$|A| \leqslant 2N, \quad |B| \leqslant 2N, \quad |C| \leqslant 2N, \qquad (N \text{ constant}).$$

Supposons en plus que les inégalités

$$|g_{xx}| \leqslant 2N, \quad |g_{xy}| \leqslant 2N, \quad |g_{yy}| \leqslant 2N$$

aient lieu en chaque point du domaine (40). Désignons par $\varphi(x)$ l'intégrale de (39) pour laquelle on a $\varphi(0) = 0$.

En posant dans l'exemple précédent $n = 1$, on voit que l'intégrale $\varphi(x)$ existe et est holomorphe dans le cercle

(41) $$|x| < \min(a, t_1) < \frac{\pi}{2\sqrt{N(N+1)}}$$

(*cf.* en particulier (36)). Ayant en vue le calcul approché de cette intégrale $\varphi(x)$, introduisons l'équation auxiliaire

(42) $$\frac{dy}{dx} = G(x, y)$$

où

$$G(x, y) = A + Bx + Cy.$$

L'intégrale, issue de l'origine des coordonnées, de cette équation a la forme

$$\psi(x) = \frac{B + AC}{C^2}(e^{Cx} - 1) - \frac{B}{C}x.$$

Afin d'apprécier l'erreur que l'on commet en considérant $\psi(x)$ comme fonction qui approche l'intégrale $\varphi(x)$, nous appliquerons le Théorème 2.

On vérifie facilement qu'en chaque point du domaine (40) l'inégalité

$$|G(x, y) - g(x, y)| \leqslant N(|x| + |y|)^2$$

subsiste. En conservant les notations du Théorème 2, posons

$$\sigma(t, u) = N(t + u)^2, \quad k = 0, \quad \omega(t, 0) = \frac{1}{\sqrt{N}} \operatorname{tg}(\sqrt{N}t) - t.$$

et observons que l'intégrale $\omega(t, 0)$ de l'équation

$$\frac{du}{dt} = N(t + u)^2$$

existe dans l'intervalle $0 \leqslant t < \frac{\pi}{2\sqrt{N}}$, lequel intervalle est plus large que l'intervalle $0 \leqslant t < t_1$ (*cf.* (41)). En appliquant le Théorème 2 on voit que l'inégalité

$$|\psi(x) - \varphi(x)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{N}} \operatorname{tg} (\sqrt{N}\,|x|) - |x|$$

a lieu en tout point du cercle (41). Nous avons ainsi obtenu une appréciation de l'erreur que l'on commet en considérant $\psi(x)$ comme valeur approchée de l'intégrale $\varphi(x)$.

Sur certaines propriétés de la formule d'interpolation de Lagrange

par

F. Leja (Cracovie)

1. Soit $f(x)$ une fonction réelle définie et continue dans l'intervalle $I=\langle a, b\rangle$ et soient

$$(1) \qquad \zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_n$$

$n+1$ points différents quelconques de cet intervalle, dont l'ensemble sera désigné par une seule lettre

$$\{\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_n\}=\zeta.$$

Posons pour $j=0,1,\dots,n$

$$(2) \qquad L_n^{(j)}(x;\zeta)=\frac{x-\zeta_0}{\zeta_j-\zeta_0}\cdots\frac{x-\zeta_{j-1}}{\zeta_j-\zeta_{j-1}}\cdot\frac{x-\zeta_{j+1}}{\zeta_j-\zeta_{j+1}}\cdots\frac{x-\zeta_n}{\zeta_j-\zeta_n}$$

et faisons correspondre à la fonction $f(x)$ d'après la méthode de Lagrange le polynome:

$$(3) \qquad \sum_{j=0}^{n} L_n^{(j)}(x;\zeta)\cdot f(\zeta_j) \sim f(x).$$

On sait que, si le nombre des points (1) augmente indéfiniment, la suite des polynomes d'approximation (3) peut ne pas tendre dans l'intervalle I vers $f(x)$ même dans le cas où les points (1) sont choisis de manière que la longueur du plus grand des segments en lesquels ces points divisent l'intervalle I tende vers zéro avec $\dfrac{1}{n}$.

Considérons maintenant la fonction $e^{n\lambda f(x)}$, où λ est un paramètre réel, et faisons lui correspondre d'après la méthode de Lagrange le polynôme

$$\sum_{j=0}^{n} L_n^{(j)}(x;\zeta)\cdot e^{n\lambda f(\zeta_j)} \sim e^{n\lambda f(x)}$$

égal à $e^{n\lambda f(x)}$ aux points (1). Ensuite formons la somme des valeurs absolues que voici:

(4) $$\sum_{j=0}^{n} \left| L_n^{(j)}(x;\zeta)\, e^{n\lambda f(\zeta_j)} \right|.$$

Il est clair, que cette somme varie avec les points (1) appartenant toujours à l'intervalle I. Je dis que pour chaque x, réel ou complexe mais fixe, la somme (4) possède une borne inférieure positive lorsque les points (1) varient dans I, leur nombre n étant supposé fixe. En effet, soient m et M le minimum et le maximum de la fonction $f(x)$ dans l'intervalle I:

$$m \leqq f(x) \leqq M.$$

Comme on a, quels que soient x et ζ,

$$\sum_{j=0}^{n} L_n^{(j)}(x;\zeta) = 1,$$

on a aussi toujours

$$\max_{(j)} \left| L_n^{(j)}(x;\zeta) \right| \geqq \frac{1}{n+1}$$

et par suite au moins un des termes de la somme (4) n'est pas plus petit que

$$\frac{1}{n+1}\cdot e^{n\lambda\mu},$$

où $\mu = m$ dans le cas $\lambda \geqq 0$, et $\mu = M$ dans le cas $\lambda < 0$.

Désignons par

(5) $$F_n(x,\lambda) = \min_{(\zeta \subset I)} \left\{ \sum_{j=0}^{n} \left| L_n^{(j)}(x;\zeta)\, e^{n\lambda f(\zeta_j)} \right| \right\}$$

la borne inférieure de la somme (4) lorsque, x, λ et n étant supposés fixes, les points (1) parcourent arbitrairement l'intervalle I et posons

(6) $$f_n(x,\lambda) = \frac{1}{n} \log F_n(x,\lambda).$$

En faisant varier n, on obtient une suite des fonctions de deux variables x et λ

(7) $$f_1(x, \lambda), f_2(x, \lambda), ..., f_n(x, \lambda), ...$$

définies pour chaque valeur réelle ou complexe de x et pour chaque valeur réelle de λ.

Ce travail a pour but principal la démonstration des propositions suivantes:

I. *Pour chaque λ réel la suite* (7) *tend, quel que soit x réel ou complexe, vers une limite finie:*

(8) $$\lim_{n\to\infty} f_n(x, \lambda) = \varphi(x, \lambda).$$

La fonction limite $\varphi(x, 0)$ correspondant à $\lambda = 0$ est identique avec la fonction de Green du domaine infini extérieur au segment I, le pôle de cette fonction étant situé à l'infini.

II. *Si x appartient à l'intervalle I la fonction de la variable λ*

(9) $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda} f_n(x, \lambda) = \frac{1}{\lambda} \varphi(x, \lambda), \qquad \text{où} \quad \lambda \neq 0$$

reste bornée dans le voisinage de $\lambda = 0$.

III. *Si x n'appartient pas à I et si λ tend vers zéro par des valeurs d'un même signe, la fonction* (9) *tend vers une limite infinie.*

Nous examinerons aussi l'existence de la limite

(10) $$\lim_{\lambda\to 0} \left\{ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda} f_n(x, \lambda) \right\} = \lim_{\lambda\to 0} \left\{ \frac{1}{\lambda} \varphi(x, \lambda) \right\}$$

dans le cas où x appartient à I.

2. Désignons par $\Phi_n^{(j)}(x, \lambda; \zeta)$, pour $j = 0, 1, ..., n$, le polynôme suivant de dégré n

(11) $$\Phi_n^{(j)}(x, \lambda; \zeta) = L_n^{(j)}(x, \zeta) \cdot e^{n\lambda f(\zeta_j)}$$

et soit

(12) $$\Phi_n(x, \lambda) = \min_{(\zeta\in I)} \{\max_{(j)} |\Phi_n^{(j)}(x, \lambda; \zeta)|\}$$

la borne inférieure du plus grand des modules

$$|\Phi_n^{(j)}(x, \lambda; \zeta)|, \qquad j = 0, 1, ..., n$$

lorsque, x, λ et n étant quelconques mais fixes, les points $\{\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n\} = \zeta$ varient arbitrairement dans l'intervalle I. Les modules des polynomes (11) étant partout finis et non négatifs, il est clair que la borne (12) existe et qu'elle est finie et non négative pour chaque valeur de x, λ et n.

J'ai démontré ailleurs que les fonctions $\Phi_n(x,\lambda)$ satisfont, quels que soient x et λ, aux inégalités suivantes[1]);

$$\Phi_{\mu+\nu}(x,\lambda) \geqq \Phi_\mu(x,\lambda) \cdot \Phi_\nu(x,\lambda) \quad \text{pour } \mu \text{ et } \nu = 1, 2, \ldots$$

Il en résulte immédiatement l'existence de la limite

$$(13) \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\Phi_n(x,\lambda)} = \Phi(x,\lambda)$$

pour chaque x et λ en vertu du lemme connu suivant[2]);

Si une suite à termes positifs $\{a_n\}$ remplit les conditions $a_{\mu+\nu} \geqq a_\mu \cdot a_\nu$ pour μ et $\nu = 1, 2, \ldots$, la suite $\{\sqrt[n]{a_n}\}$ tend vers une limite finie ou infinie.

Je dis que les fonctions $F_n(x,\lambda)$ et $\Phi_n(x,\lambda)$ définies par les formules (5) et (12) satisfont, quels que soient x, λ et n, aux inégalités suivantes

$$(14) \qquad \Phi_n(x,\lambda) \leqq F_n(x,\lambda) \leqq (n+1)\,\Phi_n(x,\lambda).$$

En effet, fixons x, λ et n et soient $\{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n\} = \xi$ $n+1$ points de l'intervalle I tels qu'on ait

$$\Phi_n(x,\lambda) \geqq \max_{(j)} |\Phi_n^{(j)}(x,\lambda;\xi)| - \varepsilon$$

où ε est un nombre positif quelconque donné d'avance.

D'après (5), on a

$$F_n(x,\lambda) \leqq \sum_{j=0}^{n} |\Phi_n^{(j)}(x,\lambda;\xi)| \leqq (n+1) \max_{(j)} |\Phi_n^{(j)}(x,\lambda;\xi)|$$

---

[1]) Bulletin de l'Acad. Polon., Sc. Mathém., Cracovie 1936, p. 79—92 (voir en particulier la page 81). La démonstration de ces inégalités dans le cas $\lambda = 0$ se trouve aussi dans ces Annales, t. 12 (1934), p. 61.

[2]) Voir ces Annales t. 12 (1934) p. 63. La limite (13) est toujours finie.

et par suite

$$F_n(x,\lambda) \leqq (n+1)[\Phi_n(x,\lambda)+\varepsilon],$$

d'où résulte la seconde des inégalités (14), car ε est arbitrairement petit. D'autre part, soient

$$\{\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_n\} = \eta$$

$n+1$ points de l'intervalle I tels qu'on ait

$$F_n(x,\lambda) \geqq \sum_{j=0}^{n} |\Phi_n^{(j)}(x,\lambda;\eta)| - \varepsilon.$$

D'après (12) on a

$$F_n(x,\lambda) \geqq \max_{(j)} |\Phi_n^{(j)}(x,\lambda;\eta)| - \varepsilon > \Phi_n(x,\lambda) - \varepsilon$$

d'où résulte la prémière des inégalités (14).

De (13) et (14) on déduit immédiatement l'existence de la limite

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{F_n(x,\lambda)} = \Phi(x,\lambda).$$

Par suite la limite (8) existe et l'on a

$$\varphi(x,\lambda) = \log \Phi(x,\lambda), \tag{15}$$

car

$$\log \sqrt[n]{F_n(x,\lambda)} = f_n(x,\lambda).$$

Observons que, dans le cas $\lambda = 0$, les polynômes (11) et les fonctions $\Phi_n(x,\lambda)$ ne dépendent pas de la fonction donnée $f(x)$. J'ai démontré dans un autre travail [1]) que le logarithme de $\Phi(x,0)$ est une fonction harmonique dans le plan de la variable complexe x en dehors du segment I, que cette fonction est continue dans le plan entier et s'annule sur le segment I et qu'elle tend vers l'infini positif lorsque x tend vers l'infini. Par conséquent, la fonction

$$\varphi(x,0)$$

est identique avec la fonction de Green du domaine extérieur au segment I ayant son pôle à l'infini. La proposition I est donc démontrée.

---

[1]) Dans ces Annales, t. 12 (1934), p. 68.

3. Il résulte de ce qui précède que la fonction limite $\Phi(x, 0)$ est continue dans le plan entier et qu'on a

$$\Phi(x, 0) > 1 \quad \text{à l'extérieur de } I$$
$$\Phi(x, 0) = 1 \quad \text{sur } I.$$

Je dis maintenant que:

Quel que soît λ, la fonction limite $\Phi(x, \lambda)$ satisfait dans le plan entier aux inégalités suivantes:

$$(16) \qquad \begin{aligned} \Phi(x, 0) \cdot e^{\lambda m} \leqq \Phi(x, \lambda) \leqq \Phi(x, 0) \cdot e^{\lambda M}, \qquad & \text{si } \lambda \geqq 0, \\ \Phi(x, 0)\, e^{\lambda M} \leqq \Phi(x, \lambda) \leqq \Phi(x, 0)\, e^{\lambda m}, \qquad & \text{si } \lambda < 0, \end{aligned}$$

où m et M désignent respectivement le minimum et le maximum de $f(x)$ dans l'intervalle I.

D é m o n s t r a t i o n. Soient x, λ et n quelconques mais fixes et soit ε un nombre positif quelconque. Faisons correspondre à ces nombres $n+1$ points du segment I

$$\{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n\} = \xi$$

tels qu'on ait

$$\Phi_n(x, \lambda) \geqq \max_{(j)} |\Phi_n^{(j)}(x, \lambda; \xi)| - \varepsilon.$$

Comme

$$|\Phi_n^{(j)}(x, \lambda; \xi)| = |L_n^{(j)}(x; \xi)|\, e^{n\lambda f(\xi_j)} \geqq |L_n^{(j)}(x; \xi)|\, e^{n\lambda\mu},$$

où $\mu = m$ si $\lambda \geqq 0$ et $\mu = M$ si $\lambda < 0$, on a

$$\Phi_n(x, \lambda) \geqq \max_{(j)} |L_n^{(j)}(x; \xi)|\, e^{n\lambda\mu} - \varepsilon \geqq \Phi_n(x, 0) \cdot e^{n\lambda\mu} - \varepsilon$$

et par suite

$$\Phi_n(x, 0)\, e^{n\lambda\mu} \leqq \Phi_n(x, \lambda),$$

car ε est arbitrairement petit. On en déduit l'inégalité

$$\Phi(x, 0)\, e^{\lambda\mu} \leqq \Phi(x, \lambda).$$

D'autre part, soit $\{\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_n\} = \eta$ un groupe de $n+1$ points du segment I tels qu'on ait

$$\Phi_n(x, 0) \geqq \max_{(j)} |\Phi_n^{(j)}(x, 0; \eta)| - \varepsilon = \max_{(j)} |L_n^{(j)}(x; \eta)| - \varepsilon.$$

Puisque

$$\Phi_n(x, \lambda) \leqq \max_{(j)} |L_n^{(j)}(x; \eta) \cdot e^{n\lambda f(\eta_j)}| \leqq \max_{(j)} |L_n^{(j)}(x; \eta)| \cdot e^{n\lambda\nu}$$

où $\nu = M$ si $\lambda \geqq 0$ et $\nu = m$ si $\lambda < 0$, on en déduit

$$\Phi_n(x, \lambda) \leqq [\Phi_n(x, 0) + \varepsilon] e^{n\lambda\nu}.$$

Mais, ε étant arbitrairement petit, on en conclut que

$$\Phi_n(x, \lambda) \leqq \Phi_n(x, 0)\, e^{n\lambda\nu}$$

et par suite

$$\Phi(x, \lambda) \leqq \Phi(x, 0)\, e^{\lambda\nu}.$$

Les inégalités (16) sont donc démontrées.

4. Je vais maintenant prouver que la fonction $\Phi(x, \lambda)$ jouit de la propriété suivante:

Quel que soit λ, *on a*

(17) $$\Phi(x, \lambda) \leqq e^{\lambda f(x)} \qquad \textit{dans l'intervalle } I.$$

En effet, soit x_0 un point quelconque de l'intervalle I et $\{\zeta_0, \zeta_1, ..., \zeta_n\} = \zeta$ un groupe de $n+1$ points différents quelconques de I, mais tels qu'on ait $\zeta_0 = x_0$. Comme, d'après (2)

$$L_n^{(0)}(x_0; \zeta) = 1 \quad \text{et} \quad L_n^{(j)}(x_0; \zeta) = 0 \quad \text{pour } j = 1, 2, ..., n,$$

on a d'après (11) et (12)

$$\Phi_n(x_0, \lambda) \leqq \max_{(j)} |L_n^{(j)}(x_0; \zeta)\, e^{n\lambda f(\zeta_j)}| = e^{n\lambda f(x_0)}$$

et par suite

$$\sqrt[n]{\Phi_n(x_0, \lambda)} \leqq e^{\lambda f(x_0)},$$

d'où l'on déduit l'inégalité (17) pour $x = x_0$ en faisant tendre n vers l'infini.

5. Soit I_0 un intervalle partiel de I et $I_1 = I - I_0$ l'ensemble de points de I n'appartenant pas à I_0. Désignons par $\zeta = \{\zeta_0, \zeta_1 ... \zeta_n\}$ $n+1$ points quelconques de I_1 et par

$$L_n(x) = \min_{(\zeta \in I_1)} \{\max_{(j)} |L_n^{(j)}(x; \zeta)|\}$$

la borne inférieure du plus grand des modules

$$|L_n^{(j)}(x; \zeta)| \qquad j = 0, 1, ..., n,$$

lorsque, x et n étant fixes, les points $\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_n$ varient arbitrairement dans I_1. J'ai démontré dans le travail cité dans la remarque 2, p. 115 que, quel que soit x réel ou complexe, la limite

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{L_n(x)} = L(x)$$

existe et satisfait aux relations suivantes [1])

$$(18) \qquad \begin{aligned} L(x) &> 1 \quad \text{aux points extérieurs à } I_1, \\ L(x) &= 1 \quad \text{aux points de } I_1. \end{aligned}$$

6. Cela posé, soit x_0 un point quelconque mais fixe de l'intervalle I. Considérons la formule (12) pour $x = x_0$:

$$\Phi_n(x_0, \lambda) = \min_{(\zeta \in I)} \{\max_{(j)} |\Phi_n^{(j)}(x_0, \lambda; \zeta)|\}$$

et observons qu'à chaque λ et n on peut faire correspondre $n+1$ points de I

$$(19) \qquad \{\zeta_0^{n\lambda}, \zeta_1^{n\lambda}, \dots, \zeta_n^{n\lambda}\} = \zeta^{n\lambda}$$

tels qu'on ait

$$(20) \qquad 2\,\Phi_n(x_0, \lambda) > \max_{(j)} |\Phi_n^{(j)}(x_0, \lambda; \zeta^{n\lambda})|.$$

Soit I_0 un intervalle partiel de I, arbitrairement petit, mais tel que le point x_0 se trouve à l'extérieur de $I_1 = I - I_0$. Dans cette hypothèse, on a d'après (18) $L(x_0) > 1$ et par conséquent le nombre

$$(21) \qquad \lambda_0 = \frac{1}{M - m} \log L(x_0), \qquad \text{où } m < M,$$

est positif. Je dis que:

Si λ remplit la condition

$$(22) \qquad 0 < |\lambda| < \lambda_0,$$

certains des points (19) *appartiennent à l'intervalle I_0 dès que le nombre n est suffisamment grand* [2]).

---

[1]) Le logarithme de $L(x)$ est égal à la fonction de Green du domaine infini extérieur à I_1.

[2]) On peut même prouver que le quotient p_n/n, où p_n est le nombre des points (19) appartenant à I_0, surpasse un nombre positif lorsque $n \to \infty$.

En effet, supposons qu'il existe un nombre λ remplissant la condition (22) et une suite infinie de valeurs de $n=n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$ telles que tous les points correspondants (19) soient extérieurs à l'intervalle I_0. Comme on a, quels que soient les points (19),

$$|\Phi_n^{(j)}(x_0, \lambda; \zeta^{n\lambda})| = |L_n^{(j)}(x_0; \zeta^{n\lambda}) \cdot e^{n\lambda f(\zeta_j^{n\lambda})}| \geqq |L_n^{(j)}(x_0; \zeta^{n\lambda})| e^{n\lambda\mu},$$

où $\mu=m$ si $\lambda\geqq 0$ et $\mu=M$ si $\lambda<0$, on a aussi

$$\max_{(j)} |\Phi_n^{(j)}(x_0, \lambda; \zeta^{n\lambda})| \geqq \max_{(j)} |L_n^{(j)}(x_0; \zeta^{n\lambda})| \cdot e^{n\lambda\mu}.$$

et a fortiori, si les points (19) appartiennent à I_1,

$$\max_{(j)} |\Phi_n^{(j)}(x_0, \lambda; \zeta^{n\lambda})| \geqq \min_{(\zeta\in I_1)} \{\max_{(j)} |L_n^{(j)}(x_0; \zeta)|\} \cdot e^{n\lambda\mu}$$

ce qui entraîne, d'après (20), l'inégalité

$$2\, \Phi_n(x_0, \lambda) > L_n(x_0) \cdot e^{n\lambda\mu}$$

et par suite la suivante

$$\sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{\Phi_n(x_0, \lambda)} > \sqrt[n]{L_n(x_0)} \cdot e^{\lambda\mu}$$

ayant lieu pour $n=n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$ En faisant tendre k vers l'infini, on en conclut que

$$\Phi(x_0, \lambda) \geqq L(x_0)\, e^{\lambda\mu}.$$

Mais, comme d'après (21) et (22)

$$L(x_0) > e^{|\lambda|(M-m)},$$

on en déduit les inégalités

$$L(x_0)\, e^{\lambda m} > e^{\lambda M} \qquad \text{si } \lambda>0,$$
$$L(x_0)\, e^{\lambda M} > e^{\lambda m} \qquad \text{si } \lambda<0,$$

et par suite

$$\Phi(x_0, \lambda) > e^{\lambda M} \qquad \text{si } \lambda>0,$$
$$\Phi(x_0, \lambda) > e^{\lambda m} \qquad \text{si } \lambda<0.$$

Or, ces dernières inégalités sont en contradiction avec les inégalités (16) d'après lesquelles on a

$$\Phi(x_0, \lambda) \leqq e^{\lambda M} \quad \text{si} \quad \lambda>0 \quad \text{et} \quad \Phi(x_0, \lambda) \leqq e^{\lambda m} \quad \text{si} \quad \lambda<0$$

car $\Phi(x_0, 0)=1$, et cette contradiction prouve que notre proposition est vraie.

7. Je vais maintenant prouver que: *Si l'hypothèse (H) spécifiée plus bas est remplie, alors à chaque* $\varepsilon>0$ *on peut faire correspondre un nombre* $\lambda_0>0$ *tel qu'on ait*

$$(23)\qquad \begin{aligned} &\frac{1}{\lambda}\log\Phi(x_0,\lambda)\geqq f(x_0)-\varepsilon, &&\textit{si}\ 0<\lambda<\lambda_0,\\ &\frac{1}{\lambda}\log\Phi(x_0,\lambda)\leqq f(x_0)+\varepsilon, &&\textit{si}\ -\lambda_0<\lambda<0. \end{aligned}$$

Démonstration. Faisons correspondre à $\varepsilon>0$ un nombre $\delta>0$ tel qu'on ait

$$f(x_0)-\varepsilon<f(x)<f(x_0)+\varepsilon$$

pour tous les x de l'intervalle I remplissant la condition

$$(24)\qquad x_0-\delta<x<x_0+\delta.$$

Supposons d'abord que le nombre x_0 constitue l'extrémité gauche de l'intervalle I et considérons les points (19) de I pour lesquels l'inégalité (20) est satisfaite. D'après le numéro précédent, il existe un nombre $\lambda_0>0$ tel que, si $|\lambda|<\lambda_0$ et si $n>N(\lambda)$, où $N(\lambda)$ est un nombre positif dépendant de λ, certains des points (19) appartiennent à l'intervalle $\langle x_0, x_0+\delta\rangle$. Soit $\zeta_0^{n\lambda}$ celui des points (19) qui est le plus proche du point x_0. Alors, si

$$0<|\lambda|<\lambda_0 \quad \text{et} \quad n>N(\lambda),$$

on a

$$(25)\qquad f(x_0)-\varepsilon<f(\zeta_0^{n\lambda})<f(x_0)+\varepsilon.$$

et par suite on a d'après (20)

$$2\,\Phi_n(x_0,\lambda)>|\Phi_n^{(0)}(x_0,\lambda;\zeta^{n\lambda})|=|L_n^{(0)}(x_0;\zeta^{n\lambda})|\cdot e^{n\lambda f(\zeta_0^{n\lambda})}.$$

Mais il est évident que $|L_n^{(0)}(x_0;\zeta^{n\lambda})|\geqq 1$, donc la dernière inégalité entraîne d'après (25) les deux suivantes

$$\begin{aligned} &2\,\Phi_n(x_0,\lambda)>e^{n\lambda[f(x_0)-\varepsilon]} &&\text{si } \lambda>0,\\ &2\,\Phi_n(x_0,\lambda)>e^{n\lambda[f(x_0)+\varepsilon]} &&\text{si } \lambda<0, \end{aligned}$$

d'où l'on conclut que

$$\begin{aligned} &\Phi(x_0,\lambda)\geqq e^{\lambda[f(x_0)-\varepsilon]} &&\text{si } \lambda>0,\\ &\Phi(x_0,\lambda)\geqq e^{\lambda[f(x_0)+\varepsilon]} &&\text{si } \lambda<0, \end{aligned}$$

et par suite la proposition est démontrée dans le cas considéré. Si x_0 constitue l'extrémité droite de l'intervalle I, la démonstration est tout-à-fait analogue.

Supposons maintenant que x_0 soit situé dans l'intérieur de l'intervalle I et que les indices des points (19) soient choisis de manière qu'on ait

$$\zeta_0^{n\lambda} < \zeta_1^{n\lambda} < \dots < \zeta_{q-1}^{n\lambda} < x_0 \leqq \zeta_q^{n\lambda} < \dots < \zeta_n^{n\lambda}.$$

Pour simplifier l'écriture, nous désignerons les points (19) comme il suit:

$$\{\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_n\} = \zeta.$$

D'autre part, nous poserons

$$\Delta(x) = (x - \zeta_0) \dots (x - \zeta_{q-2})(x - \zeta_{q+1}) \dots (x - \zeta_n),$$

$$\text{(26)} \qquad \alpha_n = \left| \frac{\Delta(x_0)}{\Delta(\zeta_{q-1})} \cdot \frac{x_0 - \zeta_q}{\zeta_{q-1} - \zeta_q} \right|,$$

$$\text{(27)} \qquad \beta_n = \left| \frac{\Delta(x_0)}{\Delta(\zeta_q)} \cdot \frac{x_0 - \zeta_{q-1}}{\zeta_q - \zeta_{q-1}} \right|;$$

par suite on aura

$$|\Phi_n^{(q-1)}(x_0, \lambda; \zeta)| = \alpha_n \cdot e^{n\lambda f(\zeta_{q-1})}, \quad |\Phi_n^{(q)}(x_0, \lambda; \zeta)| = \beta_n \cdot e^{n\lambda f(\zeta_q)}.$$

Supposons que, si $|\lambda|$ est suffisamment petit et n suffisamment grand, les points ζ_{q-1} et ζ_q, entre lesquels se trouve x_0, appartiennent à l'intervalle (24) et que par suite les valeurs

$$f(\zeta_{q-1}) \quad \text{et} \quad f(\zeta_q)$$

appartiennent à l'intervalle $\langle f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon \rangle$. Dans cette hypothèse, qui sera dite hypothèse (H), on a

$$|\Phi_n^{(q-1)}(x_0, \lambda; \zeta)| + |\Phi_n^{(q)}(x_0, \lambda; \zeta)| > (\alpha_n + \beta_n) e^{n\lambda\mu},$$

où l'on a posé

$$\mu = \begin{cases} f(x_0) - \varepsilon & \text{si } \lambda > 0, \\ f(x_0) + \varepsilon & \text{si } \lambda < 0, \end{cases}$$

et par suite

$$4 \cdot \Phi_n(x_0, \lambda) > (\alpha_n + \beta_n) e^{n\lambda\mu}$$

car il s'ensuit de (20) que

$$4 \cdot \Phi_n(x_0, \lambda) > |\Phi_n^{(q-1)}(x_0, \lambda; \zeta)| + |\Phi_n^{(q)}(x_0, \lambda; \zeta)|.$$

Observons maintenant que, lorsque x parcourt l'intervalle $(\zeta_{q-2}, \zeta_{q+1})$, le module du polynome $\Delta(x)$ croît d'abord de zéro jusqu'à un maximum et décroît ensuite jusqu'à zéro. Par suite, une au moins des inégalités

$$|\Delta(x_0)| \geqq |\Delta(\zeta_{q-1})|, \quad |\Delta(x_0)| \geqq |\Delta(\zeta_q)|$$

est satisfaite. Nous supposerons

$$|\Delta(x_0)| \geqq |\Delta(\zeta_q)|.$$

Par suite, on aura d'après (27)

$$\beta_n \geqq \left| \frac{x_0 - \zeta_{q-1}}{\zeta_q - \zeta_{q-1}} \right| = \gamma_n, \qquad \text{où } 0 < \gamma_n \leqq 1.$$

Considérons l'expression (26) et observons qu'on a

$$\frac{x_0 - \zeta_j}{\zeta_{q-1} - \zeta_j} > 1 \qquad \text{pour } j \leqq q-2$$

et que

$$\frac{\zeta_k - x_0}{\zeta_k - \zeta_{q-1}} = 1 - \frac{x_0 - \zeta_{q-1}}{\zeta_k - \zeta_{q-1}} \geqq 1 - \frac{x_0 - \zeta_{q-1}}{\zeta_q - \zeta_{q-1}} \quad \text{pour } k \geqq q,$$

donc on a

$$\alpha_n = \prod_{j=0}^{q-2} \frac{x_0 - \zeta_j}{\zeta_{q-1} - \zeta_j} \cdot \prod_{k=q}^{n} \frac{\zeta_k - x_0}{\zeta_k - \zeta_{q-1}} > \prod_{k=q}^{n} \frac{\zeta_k - x_0}{\zeta_k - \zeta_{q-1}}$$

et

$$\alpha_n > \prod_{k=q}^{n} (1 - \gamma_n) = (1 - \gamma_n)^{n-q+1} \geqq (1 - \gamma_n)^n,$$

car $q \geqq 1$ et

$$0 \leqq 1 - \gamma_n = \frac{\zeta_q - x_0}{\zeta_q - \zeta_{q-1}} < 1.$$

Il en résulte que

$$\sqrt[n]{4} \cdot \sqrt[n]{\Phi_n(x_0, \lambda)} > \sqrt[n]{\gamma_n + (1 - \gamma_n)^n} \cdot e^{\lambda \mu}$$

et, puisque la suite

$$\sqrt[n]{\gamma_n + (1 - \gamma_n)^n} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

tend vers l'unité lorsque n tend vers l'infini, on en déduit l'inégalité

$$\Phi(x_0, \lambda) \geqq e^{\lambda \mu}$$

ayant lieu pour toutes les valeurs positives de $|\lambda|$ suffisamment petites. Notre proposition est donc démontrée.

8. Supposons que x appartienne à l'intervalle I. Dans ce cas on peut poser $\Phi(x, 0) = 1$ dans les formules (16), d'où l'on déduit les inégalités

$$m \leqq \frac{1}{\lambda} \log \Phi(x, \lambda) \leqq M.$$

Par conséquent, la fonction (9) reste bornée lorsque λ tend vers zéro car, d'après (15), on a $\log \Phi(x, \lambda) = \varphi(x, \lambda)$. Je dis que:

Si** x **constitue une des extrémités de l'intervalle** I **et si** λ **reste** $\neq 0$**, la limite

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{1}{\lambda} \log \Phi(x, \lambda) = f(x). \tag{28}$$

existe.

En effet, quel petit que soit $\varepsilon > 0$, on a d'après (17) et (23)

$$f(x) - \varepsilon \leqq \frac{1}{\lambda} \log \Phi(x, \lambda) \leqq f(x), \qquad \text{si } \lambda > 0,$$

$$f(x) \leqq \frac{1}{\lambda} \log \Phi(x, \lambda) \leqq f(x) + \varepsilon, \qquad \text{si } \lambda < 0,$$

pourvu que le module de λ soit plus petit q'un nombre positif dépendant de ε et cela prouve que la limite (28) existe.

Il s'ensuit que la limite réitérée (10) existe et elle est égale à $f(x)$ aux points extrèmes de l'intervalle I.

Observons que la formule (28) est une conséquence des inégalités (23) et que ces inégalités restent vraies à l'intérieur de l'intervalle I à condition que l'hypothèse (H) soit remplie quel petit que soit ε. Il en résulte que, ***si l'hypothèse*** (H) ***est remplie, la limite*** (10) ***existe dans l'intervalle entier*** I ***et elle est égale à*** $f(x)$.

Nous allons maintenant établir la proposition suivante:

Si** x **est un point quelconque extérieur à l'intervalle** I**, on a

$$\begin{aligned} &\lim_{\lambda \to 0+} \frac{1}{\lambda} \log \Phi(x, \lambda) = +\infty, \\ &\lim_{\lambda \to 0-} \frac{1}{\lambda} \log \Phi(x, \lambda) = -\infty. \end{aligned} \tag{29}$$

En effet, soit x un point fixe situé à l'extérieur de l'intervalle I. D'après (16), on a

$$(30)\qquad \begin{aligned} g+\lambda m &\leqq \log \Phi(x,\lambda) \leqq g+\lambda M, && \text{si } \lambda>0, \\ g+\lambda M &\leqq \log \Phi(x,\lambda) \leqq g+\lambda m, && \text{si } \lambda<0, \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$g=\log \Phi(x,0).$$

Mais on a vu plus haut que, si x est extérieur à I, on a $\Phi(x,0)>1$, d'où il s'ensuit que

$$g>0.$$

L'existence des limites (29) résulte donc immédiatement des inégalités (30).

Remarque sur l'intégration approchée des équations différentielles

Extrait d'une lettre de J. Hadamard (Paris)

Le premier résultat contenu dans votre intéressant article[1]) peut, me semble-t-il, se rattacher à un curieux théorème de M. Lusin que, lors de son exposé à mon Séminaire (par M. Fogelson) j'énonçais — un peu irrévérencieusement, je l'avoue — »N'importe quelle fonction a, ou à peu près, n'importe quelle dérivée«; autrement dit:

A toute fonction continue arbitrairement donnée $y(x)$, on peut substituer, avec une erreur partout inférieure à un nombre positif arbitrairement donné ε, une fonction ayant pour dérivée une autre fonction intégrable[2]) arbitrairement donnée $y_1(x)$, sauf aux points d'un ensemble de mesure inférieure à ε.

La démonstration de ce théorème paradoxal est d'ailleurs très simple. On commencera par ramener y_1 à être identiquement nul; puis on remplacera y par une »*Treppenfunktion*« en différant d'aussi peu que l'on veut; enfin, sur des segments de longueur totale inférieure à ε, on remplacera les traits verticaux qui relient entre eux les paliers successifs par des traits obliques (de pente, en général, très grande).

Cette démonstration met en évidence le rôle, que vous faites si bien ressortir, joué par la condition que les dérivées soient limitées en valeur absolue.

Dans le problème qui vous intéresse, on n'a qu'à prendre $y_1 = f\{x, \varphi(x)\}$[3]).

---

[1]) S. K. Zaremba, *Remarques sur l'intégration approchée des équations différentielles,* Bull. de l'Académie Polonaise, Série A, 1936, p. 528—535 *(Note de la Rédaction).*

[2]) Si mes souvenirs sont exacts, M. Lusin demande seulement à rendre la dérivée approximativement égale à y_1, mais, comme on le voit, on peut aller, en dehors de l'ensemble de mesure inférieure à ε, jusqu'à une égalité exacte.

[3]) En supposant, bien entendu, la fonction $f(x, y)$ continue par rapport à y *(Note de la Rédaction).*

Duale Grössen, Grossrotation, Grossdivergenz und die Stokes-Gausschen Sätze in allgemeinen Räumen

von

Jan von Weyssenhoff

§ 1. Kurze Inhaltsangabe

Um die Übersicht der verschiedenen Formen, in welchen die verallgemeinerten Stokes-Gausschen Integralsätze in der Literatur vorkommen, zu erleichtern, ist es vorteilhaft diese Sätze zuerst in möglichst mannigfachen Gestalten in einem allgemeinen, n-dimensionalen, »jeder näheren Bestimmung baren Kontinuum«[1]) X_n zu formulieren, von wo aus der Übergang zu den speziellen Formen für Raüme mit affinem Zusammenhang, für Riemannsche, Euklidische, affine Raüme u. dgl. keine Schwierigkeiten mehr bietet. Die Zusammenstellung dieser Formen für X_n soll eben den Abschluss der vorliegenden Abhandlung bilden. Vorerst müssen aber einige Vorbereitungen getroffen werden. Nach der Erledigung einiger formalen und terminologischen Fragen (§ 2) wird die *duale Zuordnung* von kovarianten Multivektoren zu kontravarianten Multivektordichten [vom Gewicht $+1$] sowie von kontravarianten Multivektoren zu kovarianten Multivektorvolumina [Dichten vom Gewichte -1] definiert (§ 3) und einige damit in Zusammenhang stehenden Formeln angegeben (§ 4). Sodann werden die Operatoren Rot, Div (sowie rot, div) derart bestimmt, dass die Grossdivergenz einer kontravarianten Multivektordichte, welche einem kovarianten Multivektor dual zugeordnet ist, dual zur Grossrotation dieses Multivektors wird (§ 5). Durch entsprechende Wahl der Zuordnungsregeln (die von der Schouten-

[1]) Vgl. H. Weyl: *Raum, Zeit, Materie*, 5 Aufl. (Berlin 1923), S. 104.

Struikschen etwas abweichen) und der Div-Definition (Summation nach dem letzten Index) gelingt es in allen Formeln den Gebrauch eines veränderlichen Vorzeichens in der Gestalt einer Potenz von —1 zu vermeiden (vgl. § 6, wo die »Zwangslaüfigkeit« unserer Zuordnungsregeln bewiesen wird).

Die weiteren Paragraphen enthalten eine kurze Besprechung der vereinfachten Klein-Grassmannschen Schreibweise der mehrfachen Integrale [1]) (mit Berücksichtigung des Schraubsinns der Integrationselemente), welche mit der Cartanschen Schreibweise in nahem Zusammenhang steht. Neben den eigentlichen Hyperflächenelementen werden auch duale eingeführt, welche die Ausdrucksformen der Hyperflächenintegrale viel mannigfacher zu gestalten erlauben (§ 7 und 8). Es folgt noch eine kurze Beweisskizze des Stokes-Gausschen Integralsatzes in X_n (§ 9) und sodann die oben erwähnte Zusammenstellung der vier Hauptgestalten dieser Sätze (§ 10).

Es gibt in einem n-dimensionalen Raume $n-1$ verschiedene Stokes-Gaussche Sätze. Eine besonders einfache Form kann man diesen Sätzen in den beiden aüssersten Fällen geben, die im 3-dimensionalen Raum allein aufreten und im 2-dimensionalen zusammenfallen: der eine betrifft den Zusammenhang zwischen Linien- und Flächenintegralen (verallgemeinerter Stokesscher Satz), der andere zwischen $(n-1)$-fachen und n-fachen Integralen (verallgemeinerter Gausscher Satz).

Zwei Bemerkungen über die Ableitung neuer, speziell für den Riemanschen Raum geltender Formeln, sowie über die verschiedenen möglichen Schreibweisen der Integralsätze ohne geometrische Bedeutung bilden den Gegenstand des letzten Paragraphen (§ 11).

§ 2. Formale und terminologische Vorbereitungen

In dieser Abhandlung wird i. allg. die konsequente Schoutensche Kernbuchstabenmethode des Riccikalküls in ihrer neuesten Fassung [2]) gebraucht, mit einigen unwesentlichen Abän-

---

[1]) Vgl. z. B. Enzyklopädie der Math. Wiss., Art. ***Relativitätstheorie*** von W. Pauli (Berlin 1921), S. 604.

[2]) J. A. Schouten und D. J. Struik: ***Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie*** (Groningen 1935). Weiterhin zitiert als Sch. u. Str.

derungen, von denen die Einführung des $\stackrel{d}{=}$-Zeichens und die Verabredung über den Gebrauch deutscher, lateinischer und griechischer Kernbuchstaben (sowie die Bezeichnung der Hyperflächenelemente mit $ds^{\lambda_1 \ldots \lambda_n}$ statt $f^{\lambda_1 \ldots \lambda_n} d\tau_n$) am meisten in die Augen fällt.

Da durchwegs nur holonome Bezugssysteme in Betracht gezogen werden, so wird das durch kein besonderes Zeichen hervorgehoben.

Als wichtigste terminologische Neuheit schlage ich vor, die »Affinordichten vom Gewichte -1« *Affinorvolumina* zu nennen. »Affinordichten vom Gewichte $+1$« nenne ich einfach — in Anlehnung an die ursprüngliche Bedeutung des Wortes Tensordichte bei Weyl — *Affinordichten*[1]). »Dichten vom Gewichte k« für $|k| \neq 1$ spielen in der Physik und wohl auch in der Geometrie nur eine nebensächliche Rolle und werden hier ausser Betracht gelassen.

Im Folgenden sollen kleine lateinische Kernbuchstaben für Affinoren in X_n gebraucht werden, deutsche für Affinordichten und griechische für Affinorvolumina. Die Koordinaten werden danach mit x^λ (nicht ξ^λ) bezeichnet, da ihre Differentiale Vektoren in X_n sind.

Alle griechischen Indizes sollen von 1 bis n laufen; ihre Wahl soll, wie üblich, von derjenigen der Kernbuchstaben völlig unabhängig sein. Zur Abkürzung setzen wir durchwegs

$$\boxed{n = m + p} \tag{2.1}$$

wo m und p ganze nicht negative Zahlen und n die Zahl der Dimensionen des betrachteten Raumes bedeuten.

Um Wiederholungen zu wermeiden, sei noch ein für allemal festgesetzt, dass weiterhin $\mathfrak{a}^{\lambda_1 \ldots \lambda_p}$ und $a_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_m}$ immer Multivektordichten und Multivektoren bedeuten sollen, welche einander nach (3.8) dual zugeordnet sind und ebenso $\beta_{\lambda_1 \ldots \lambda_p}$ und $b^{\varkappa_1 \ldots \varkappa_m}$ Multivektorvolumina und Multivektoren, die einander nach (3.9) dual zugeordnet sind.

---

[1]) Obwohl sie keine »Weylschen Dichten« sind, in deren Transformationsgleichungen der absolute Betrag der Transformationsdeterminante Δ, statt Δ selbst, auftritt.

§ 3. Duale Zuordnung von Multivektordichten, Multivektoren und Multivektorvolumina

Wir gehen von der bekannten Tatsache aus, dass in einem X_n *die Komponenten* [Bestimmungszahlen] *jeder kontravarianten n-Vektordichte und ebenso jedes kovarianten n-Vektorvolumens Skalare sind.* Deshalb bestimmen die folgenden Festsetzungen:

(3.1) $$\mathfrak{e}^{1\ldots n} = 1, \qquad \varepsilon_{1\ldots n} = 1$$

eindeutig eine n-Vektordichte und ein n-Vektorvolumen

(3.2) $$\mathfrak{e}^{\lambda_1\ldots\lambda_n}, \qquad \varepsilon_{\lambda_1\ldots\lambda_n},$$

die wir weiterhin ständig mit diesen Symbolen bezeichnen werden.

Infolge der Existenz dieser Grössen hat bekanntlich[1]) ein kovarianter m-Vektor dieselbe geometrische Bedeutung wie eine kontravariante p-Vektordichte und ebenso ein kontravarianter m-Vektor dieselbe geometrische Bedeutung wie ein kovariantes p-Vektorvolumen. Die Zuordnung dieser Grössen — wir wollen sie *duale Zuordnung* nennen — definieren wir, wie folgt:

(3.3) $$\mathfrak{a}^{\lambda_1\ldots\lambda_p} = \frac{1}{m!}\,\mathfrak{e}^{\lambda_1\ldots\lambda_n}\, a_{\lambda_{p+1}\ldots\lambda_n}$$

(3.4) $$\beta_{\lambda_1\ldots\lambda_p} = \frac{1}{m!}\,\varepsilon_{\lambda_1\ldots\lambda_n}\, b^{\lambda_{p+1}\ldots\lambda_n}.$$

Mit diesen Formeln sind die folgenden äquivalent:

(3.5) $$a_{\lambda_{p+1}\ldots\lambda_n} = \frac{1}{p!}\,\mathfrak{a}^{\lambda_1\ldots\lambda_p}\,\varepsilon_{\lambda_1\ldots\lambda_n}$$

(3.6) $$b^{\lambda_{p+1}\ldots\lambda_n} = \frac{1}{p!}\,\beta_{\lambda_1\ldots\lambda_n}\,\mathfrak{e}^{\lambda_1\ldots\lambda_n}.$$

Unsere Zuordnungsregeln weichen (wenn mp ungerade ist) von den Schouten-Struikschen[2]) etwas ab, was im § 6 näher begründet wird.

Die alternierenden Grössen links und rechts besitzen dieselbe Anzahl von *selbstständigen* (englisch: distinct[3]), polnisch: *odrębne*)

---

[1]) Sch. u. Str., S. 29. [2]) Sch. u. Str. S. 160.

[3]) Vgl. z. B. L. P. Eisenhart: *Riemannian Geometry* (Princeton 1926), S. 21.

Komponenten und zwar $\binom{n}{m} = \binom{n}{p} = \frac{n!}{m!p!}$, welche — bei passender Wahl der Indexreihenfolge — einander paarweise gleich sind. Diese einfache Tatsache wird nur schwerfällig durch die Formeln (3.3) bis (3.6) wiedergegeben. Deshalb schlage ich vor anstatt (3.3) und (3.5)

(3.7) $$(\mathfrak{a}^{\lambda_1 \cdots \lambda_p})_d = a_{\lambda_{p+1} \cdots \lambda_n}, \qquad (a_{\lambda_{p+1} \cdots \lambda_n})_d = \mathfrak{a}^{\lambda_1 \cdots \lambda_p}$$

zu schreiben oder noch einfacher und bequemer

(3.8) $$\boxed{\mathfrak{a}^{\lambda_1 \cdots \lambda_p} \overset{d}{=} a_{\lambda_{p+1} \cdots \lambda_n}}$$

und ebenso

(3.9) $$\boxed{\beta_{\lambda_1 \ldots \lambda_p} \overset{d}{=} b^{\lambda_{p+1} \cdots \lambda_n}.}$$

Die Gleichungen (3.1) gehen dann z. B. über in

(3.10) $$\mathfrak{e}^{\lambda_1 \cdots \lambda_n} \overset{d}{=} 1, \qquad \varepsilon_{\lambda_1 \ldots \lambda_n} \overset{d}{=} 1.$$

Die Zuordnungsregeln, welche durch (3.8) und (3.9) dargestellt sind, kann man kurz so zusammenfassen[1]): 1) $\mathfrak{a}^{\lambda_1 \cdots \lambda_p} = \pm a_{\varkappa_1 \cdots \varkappa_m}$ und ebenso $\beta_{\lambda_1 \ldots \lambda_p} = \pm b^{\varkappa_1 \cdots \varkappa_m}$, wenn die Zahlenfolge $\lambda_1 \ldots \lambda_p, \varkappa_1 \ldots \varkappa_m$ eine Permutation der Zahlenfolge $1, 2, \ldots, n$ ist und zwar gilt das Pluszeichen, wenn diese Permutation gerade ist und das Minuszeichen, wenn sie ungerade ist, 2) es ergibt sich kein Zusammenhang zwischen den links und rechts stehenden Komponenten, wenn irgend ein λ irgend einem $\varkappa$ gleich ist.

Es sei noch bemerkt, dass die obigen Zuordnungsregeln nichts mit der Wahl eines positiven Schraubsinns in X_n zu tun haben. Die bekannte Zuordnung von Vektoren und Bivektoren im dreidimensionalen Euklidischen Raum hängt dagegen von dieser Wahl ab, denn sie entsteht aus der unsrigen durch die Ersetzung 1) von $\mathfrak{a}^\lambda$ durch $\sqrt{g}\, a^\lambda$, wo g der absolute Betrag der aus den Koeffizienten der metrischen Fundamentalform gebildeten Determinante ist und 2) (in rechtwinkligen Koordinaten) von $\sqrt{g}$ durch

[1]) Mnemotechnische Regel: ***höflich.*** Die Indizes der in die Affinorrechnung neu eingeführten Grössen: Multivektordichten und Multivektorvolumina werden zuerst aufgezählt.

± 1; bekanntlich kann aber $\sqrt{g}$ nur dann als skalare Dichte (in dem hier angenommenen Sinne, vgl. Fussnote S. 129) bei beliebigen Koordinatentransformationen betrachtet werden, wenn man festsetzt, dass das Vorzeichen der Wurzel bei jedem Übergang von einem Koordinatensystem zu einem anderen mit entgegengesetzten Schraubsinn geändert wird.

§ 4. Hilfssätze für die Rechnung mit alternierenden Systemen

Ehe wir weiter gehen, stellen wir zunächst einige für das Rechnen mit alternierenden Systemen[1]) und dem Alternationszeichen [ ] bequeme Regeln und Formeln zusammen. Die Beweise, die alle sehr leicht zu führen sind, lassen wir dabei weg. Diese Formelzusammenstellung wird es uns in der Folge erlauben alle die nötigen Umformungen durch Hinweise auf die entsprechenden Formeln dieses Paragraphen zu ersetzen.

Rechenregel 1. Eine Überschiebung mit Alternation nach m gesättigten oberen (unteren) Indizes ist derselben Überschiebung mit Alternation nach den entsprechenden unteren (oberen) Indizes äquivalent, z. B. für beliebige Systeme $U_{\lambda_1 \ldots \lambda_m}$ und $V^{\lambda_1 \ldots \lambda_m}$

$$(4.1) \qquad U_{\lambda_1 \ldots \lambda_m} V^{[\lambda_1 \ldots \lambda_m]} = U_{[\lambda_1 \ldots \lambda_m]} V^{\lambda_1 \ldots \lambda_m} = U_{[\lambda_1 \ldots \lambda_m]} V^{[\lambda_1 \ldots \lambda_m]}.$$

Anders gesagt: man darf in einem inneren Produkt eine obenstehende eckige Klammer über Summationsindizes [gesättigte Indizes] nach unten schaffen und umgekehrt.

Es macht auch keinen Unterschied, wenn man sowohl die obere, als auch die untere Klammer beibehält.

Da für ein alternierendes System

$$(4.2) \qquad \Phi_{\lambda_1 \ldots \lambda_m} = \Phi_{[\lambda_1 \ldots \lambda_m]}$$

ist, so erhält man aus der obigen Regel eine weitere Regel 2, die durch das folgende Beispiel ($m = 2$) genügend erklärt ist

$$(4.3) \qquad \Phi_{\lambda\mu} U^{[\lambda} V^{\mu]} = \Phi_{\lambda\mu} U^{\lambda} V^{\mu}.$$

---

[1]) Vgl. z. B. A. J. Mc Connell: *Applications of the Absolute Differential Calculus* (London 1931), Kap. I.

Satz 1.

$$\boxed{\frac{1}{m!}\,a_{\lambda_{p+1}\cdots\lambda_n}\,b^{\lambda_{p+1}\cdots\lambda_n}=\frac{1}{p!}\,\mathfrak{a}^{\lambda_1\cdots\lambda_p}\,\beta_{\lambda_1\cdots\lambda_p}} \tag{4.4}$$

z. B. für $n=3$

$$\tfrac{1}{2}\,a_{\mu\nu}\,b^{\mu\nu}=\mathfrak{a}^{\lambda}\beta_{\lambda}.$$

Satz 2.

$$\frac{1}{m!}\,a_{\lambda_{p+1}\cdots\lambda_n}\,b^{\lambda_{p+1}\cdots\lambda_n}\stackrel{d}{=}\binom{n}{p}\,\mathfrak{a}^{[\lambda_1\cdots\lambda_p}\,b^{\lambda_{p+1}\cdots\lambda_n]}. \tag{4.5}$$

Satz 3.

$$\frac{1}{m!}\,a_{\lambda_{p+1}\cdots\lambda_n}\,b^{\lambda_{p+1}\cdots\lambda_n}\stackrel{d}{=}\binom{n}{p}\,\beta_{[\lambda_1\cdots\lambda_p}\,a_{\lambda_{p+1}\cdots\lambda_n]}. \tag{4.6}$$

Mnemotechnisch sind die obigen Formeln leicht zu behalten, wenn man bemerkt, dass 1) die numerischen Koeffizienten derart sind, dass jeder selbstständige Summand links und rechts gerade einmal erscheint und 2) die Reihenfolge der Kernbuchstaben in den rechten Seiten der zwei letzten Formeln im Zusammenhang mit der in § 3 gegebenen mnemotechnischen Regel steht: die Multivektordichten und Multivektorvolumina gehen voran.

Zuletzt bringen wir noch einen Satz, der für beliebige kontravariante alternierende Systeme $\Phi^{\lambda_1\cdots\lambda_{p+1}}$ und $\Psi^{\lambda_1\cdots\lambda_m}$ gilt.

Satz 4.

$$\frac{1}{m}\,\Phi^{[\lambda_1\cdots\lambda_p|\mu|}X_{\mu}\Psi^{\lambda_{p+1}\cdots\lambda_n]}=\frac{1}{p+1}\,\Phi^{[\lambda_1\cdots\lambda_{p+1}}X_{\mu}\Psi^{|\mu|\lambda_{p+2}\cdots\lambda_n]}. \tag{4.7}$$

Hier kann offenbar X_μ ebenso eine (echte oder ideale[1])) kovariante Grösse, wie ein kovarianter Operator, z. B. ∂_μ oder ∇_μ sein; nur muss man den Wirkungskreis dieses Operators beiderseits gleich umgrenzen, z. B. ihn nur auf Φ oder nur auf Ψ oder auf beide zusammen wirken lassen. In den beiden letzten Fällen wird man wohl X_μ an erste Stelle vor Φ und Ψ bringen wollen, was offenbar ohne weiteres erlaubt ist. Vgl. § 9, Übergang von III zu III'.

---

[1]) Vgl. z. B. J. A. Schouten: *Der Riccikalkül* (Berlin 1924), S. 23.

§ 5. Die Operatoren Rot, rot, Div und div

Nun schlage ich vor, die Definitionen der folgenden, oft gebrauchten Operatoren folgendermassen festzusetzen [1])

(5.1) $$\boxed{\mathrm{Rot}_{\varkappa}\, a_{\lambda_1 \ldots \lambda_m} = (m+1)\, \partial_{[\varkappa} a_{\lambda_1 \ldots \lambda_m]}}$$

(5.2) $$\mathrm{rot}_{\varkappa}\, a_{\lambda_1 \ldots \lambda_m} = (m+1)\, \nabla_{[\varkappa} a_{\lambda_1 \ldots \lambda_m]}$$

Die *Grossrotation* [2]) ist bekanntlich ein kovarianter Operator in X_n, aber nur für kovariante Multivektoren: aus jedem kovarianten Multivektorfeld erzeugt sie ein kovariantes Multivektorfeld von einer um eins höheren Valenz, was im direktem Zusammenhang mit der Stokes-Gausschen Formel I, § 10 steht. Dagegen ist die *Kleinrotation* ein invarianter Operator für beliebige Affinoren, der jedoch offenbar erst in einem Raume mit bestimmtem affinem Zusammenhang existiert und — was für unsere Wahl der Bezeichnungen entscheidend war — es entspricht ihr i. allg. kein Integralsatz (wenn sie nicht gerade mit der Grossrotation zusammenfällt). Mnemotechnisch sind also die Bezeichnungen insofern richtig gewählt, als man in einem gewissen Sinne die Grossrotation als Verallgemeinerung der gewöhnlichen Rotation »im Grossen« und die Kleinrotation als die Verallgemeinerung »im Kleinen« betrachten kann.

Ähnlich definieren wir

(5.3) $$\boxed{\mathrm{Div}_{\varkappa}\, \mathfrak{a}^{\lambda_1 \ldots \lambda_{p-1} \varkappa} = \partial_{\varkappa} \mathfrak{a}^{\lambda_1 \ldots \lambda_{p-1} \varkappa}}$$

(5.4) $$\mathrm{div}_{\varkappa}\, \mathfrak{a}^{\lambda_1 \ldots \lambda_{p-1} \varkappa} = \nabla_{\varkappa} \mathfrak{a}^{\lambda_1 \ldots \lambda_{p-1} \varkappa}.$$

Die Summation muss hier nach dem letzten Index vorgenommen werden, was im nächsten Paragraphen begründet wird.

---

[1]) Für $m=1$ ist $\mathrm{Rot}_{\mu} a$ gleich $\partial_{\mu} a$ und wird dann gewöhnlich Gradient genannt.

[2]) Die Ausdrücke Grossrotation und Grossdivergenz stammen von Sommerfeld (Ann. d. Phys., **32**, 749, 1910 und **33**, 649, 1910), der sie jedoch in einem anderen, heute wohl veraltetem Sinne gebrauchte, die Vorsilbe »Gross« sollte auf die *Vier*dimensionalität des betrachteten Raumes hinweisen.

Wenn man deutsche Buchstaben für Affinordichten gebraucht, so muss folgerichtig der Operator (5.3) mit lateinischen Buchstaben geschrieben werden, da er aus einer kovarianten Vektor*dichte* eine ebensolche (mit einer um eins niedrigeren Valenz) erzeugt. Ein Div-Operator kann erst in einem Raum mit inhaltstreuer Übertragung (wie der Riemannsche Raum) definiert werden, wo jedem Affinor eine Affinordichte zugeordnet ist.

Es wurde schon erwähnt, dass die Definitionen der Grossrotation und der Grossdivergenz so gewählt sind, dass

$$\boxed{\mathrm{Div}_{\varkappa}\mathfrak{a}^{\lambda_1\cdots\lambda_{p-1}\varkappa} \stackrel{d}{=} \mathrm{Rot}_{\lambda_p} a_{\lambda_{p+1}\cdots\lambda_n}} \tag{5.5}$$

Für $n=3$, $p=2$ und $\lambda_1=1$ haben wir z. B.

$$\mathrm{Div}_{\varkappa}\mathfrak{a}^{1\varkappa}=\partial_2\mathfrak{a}^{12}+\partial_3\mathfrak{a}^{13}=\partial_2\mathfrak{a}^{12}-\partial_3\mathfrak{a}^{31}=\partial_2 a_3-\partial_3 a_2=\mathrm{Rot}_2 a_3. \tag{5.6}$$

§ 6. Begründung der Zuordnungsregeln

Jetzt können wir beweisen, dass unsere Zuordnungsregeln (3.8) und (3.9), sowie die Definition der Grossdivergenz einer Multivektordichte mit *Summation nach dem letzten Index* die einzig möglichen sind, wenn man den Rot-Operator nach (5.1) definiert, sowie das Bestehen der dualen Relation (5.5) und der einfachen Formel (4.4) ohne Potenz von -1 fordert.

Was zuerst die Rot-Definition anbetrifft, so bemerken wir, dass viele — wohl die meisten — Autoren

$$\mathrm{Rot}_{\lambda} a_{\mu} = \frac{\partial a_{\mu}}{\partial x^{\lambda}} - \frac{\partial a_{\lambda}}{\partial x^{\mu}} \tag{6.1}$$

setzen, was auch der üblichen Definition der Rotation in der gewöhnlichen dreidimensionalen Vektorrechnung $\left(x\text{-Komponente gleich } \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)$ am nächsten kommt, doch gibt es auch solche, die rechterhand in (6.1) das entgegengesetzte Vorzeichen wählen. Wenn man aber das in der Affinorrechnung so bequeme — man könnte fast sagen, unentbehrliche — Schoutensche Symbol ∂_{λ} für

$\frac{\partial}{\partial x^\lambda}$ gebraucht, so hat man praktisch keine Wahl mehr, da die Gleichung (6.1) jetzt die Form

$$\text{(6.2)} \qquad \mathrm{Rot}_\lambda a_\mu = \partial_\lambda a_\mu - \partial_\mu a_\lambda = 2\,\partial_{[\lambda} a_{\mu]}$$

annimmt.

Nun ensteht beim dualen Übergang von der Divergenz zur Rotation ein neuer Index am Anfang der unteren Indexfolge und es verschwindet ein oberer Index. Es ist einleuchtend, dass man das Erscheinen einer Potenz von -1 in der allgemeinen Formel (5.5) nur dann vermeiden kann, wenn dieser verschwindende Index an letzter Stelle steht und wenn bei der dualen Zuordnung von Multivektoren und Multivektordichten die Reihenfolge: obere Indizes, untere Indizes gewählt wird.

Endlich ist die Zuordnungsregel (3.9) der Regel (3.8) derart angepasst, dass kein wechselndes Vorzeichen in die Formel (4.4) eingeht; ein Faktor $(-1)^{mp}$ würde zur Erscheinung kommen, wenn in beiden Regeln dieselbe Reihenfolge: obere Indizes, untere Indizes, beibehalten würde.

§ 7. Eigentliche und duale Hyperflächenelemente

Die (eigentlichen) Hyperflächenelemente sind kontravariante Multivektoren, die folgendermassen definiert werden:

$$\text{(7.1)} \qquad ds^\lambda = \underset{1}{dx^\lambda}, \quad ds^{\lambda\mu} = \begin{vmatrix} \underset{1}{dx^\lambda} & \underset{1}{dx^\mu} \\ \underset{2}{dx^\lambda} & \underset{2}{dx^\mu} \end{vmatrix}, \quad ds^{\lambda\mu\nu} = \begin{vmatrix} \underset{1}{dx^\lambda} & \underset{1}{dx^\mu} & \underset{1}{dx^\nu} \\ \underset{2}{dx^\lambda} & \underset{2}{dx^\mu} & \underset{2}{dx^\nu} \\ \underset{3}{dx^\lambda} & \underset{3}{dx^\mu} & \underset{3}{dx^\nu} \end{vmatrix}, \ldots$$

allgemein [1])

$$\text{(7.2)} \qquad ds^{\lambda_1 \ldots \lambda_m} = m!\, \underset{1}{dx^{[\lambda_1}} \underset{2}{dx^{\lambda_2}} \ldots \underset{m}{dx^{\lambda_m]}} = m!\, \underset{[1}{dx^{\lambda_1}} \underset{2}{dx^{\lambda_2}} \ldots \underset{m]}{dx^{\lambda_m}}.$$

Hier bedeuten $\underset{1}{dx^\lambda}, \underset{2}{dx^\lambda}, \ldots, \underset{m}{dx^\lambda}$ m linear unabhängige Linienelemente.

---

[1]) Sch. u. Str. schreiben $f^{\lambda_1 \ldots \lambda_m} d\tau_m$, in Schoutens Riccikalkül stellte dasselbe Symbol einen $m!$-fach kleineren m-Vektor dar. Unser $ds^{\lambda_1 \ldots \lambda_m}$ ist mit dem Cartanschen $[dx^{\lambda_1} \ldots dx^{\lambda_m}]$ identisch. Es ist noch zu bemerken, dass Cartan das [ ]-Zeichen unter dem Integralzeichen weglässt.

Man kann in bekannter Weise diese Definition präzisieren, indem man das betrachtete Hyperflächenelement als Teil (oder genauer: als Limes eines Teils) einer kleinen aber endlich ausgedehnten Hyperfläche auffasst. Wenn die Gleichung dieser Hyperfläche in Parameterdarstellung gegeben wird durch

$$x^\lambda = x^\lambda(l^1, l^2, \ldots, l^m), \tag{7.3}$$

so setzt man

$$\underset{1}{dx^\lambda} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial l^1}\, dl^1, \quad \underset{2}{dx^\lambda} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial l^2}\, dl^2, \ldots \tag{7.4}$$

und

$$ds^{\lambda_1 \ldots \lambda_m} = \frac{\partial(x^{\lambda_1} \ldots x^{\lambda_m})}{\partial(l^1 \ldots l^m)}\, dl^1 \ldots dl^m. \tag{7.5}$$

Ohne die Hyperflächenelemente als selbstständige Grössen zu definieren und die Hyperflächenintegrale als Grenzwerte ihrer Summen aufzufassen (was ein echter Geometer wohl immer vorziehen wird), kann man auch diese Integrale direkt durch Zurückführung auf gewöhnliche mehrfache Integrale definieren, was im nächsten § kurz in Erinnerung gebracht werden soll.

Zuerst jedoch noch einige Worte über ***duale Hyperflächenelemente***, deren Einführung die Schreibweise der Hyperflächenintegrale in vielen Fällen sehr erleichtert. In Anlehnung an (3.9) werden wir sie wie folgt definieren

$$d\sigma_{\lambda_1 \ldots \lambda_p} \stackrel{d}{=} ds^{\lambda_{p+1} \ldots \lambda_n}. \tag{7.6}$$

Es ist klar, dass diese dualen Elemente in X_n nichts mit dem Senkrechtstehen zu tun haben [1]) und einfach eine andere Schreibweise für dieselben geometrischen Grössen darstellen.

Man sieht das am besten ein, wenn man die Linienelemente, aus welchen die Hyperflächenelemente gebildet werden, speziell so wählt, dass sie längst der Parameterlinien des betrachteten Koordinatensystems zu liegen kommen und die Gleichungen $\underset{\lambda}{dx^\lambda} = dx^\lambda$ befriedigen. Dann hat man

$$ds^{\lambda_1 \ldots \lambda_m} \stackrel{*}{=} dx^{\lambda_1} dx^{\lambda_2} \ldots dx^{\lambda_m} \tag{7.7}$$

---

[1]) Und im Riemannschen Raum erst dann, wenn man $d\sigma_{\lambda_1 \ldots \lambda_p}$ nach Multiplikation mit $\sqrt{g}$ durch $ds_{\lambda_1 \ldots \lambda_p}$ ersetzt.

und das dazu duale Element ist das Produkt derselben dx^λ mit einem Plus- oder Minuszeichen, das durch die Zuordnungsregeln der dualen Elemente bestimmt wird.

So hat man z. B. für $n=3$, $m=2$

$$\frac{1}{2} a_{\lambda\mu} ds^{\lambda\mu} \overset{*}{=} a_{12} dx^1 dx^2 + a_{23} dx^2 dx^3 + a_{31} dx^1 dx^3 \tag{7.8}$$
$$\overset{*}{=} \mathfrak{a}^3 \; d\sigma_3 \; + \mathfrak{a}^1 \; d\sigma_1 \; + \mathfrak{a}^2 \; d\sigma_2 \; = \mathfrak{a}^\varkappa d\sigma_\varkappa$$

und für $m=n$ [1])

$$d\sigma = ds^{1\ldots n} \overset{*}{=} dx^1 dx^2 \ldots dx^n. \tag{7.9}$$

§ 8. Hyperflächenintegrale

Die Hyperflächenintegrale können offenbar nur auf *orientierten* Hyperflächen definiert werden, deshalb nehmen wir an, dass alle betrachteten Hyperflächen S_m *orientierbar* (zweiseitig) und durch Angabe eines Normal-m-Beins [eines Systems von m linear unabhängigen, S_m tangierenden Vektoren in bestimmter Reihenfolge] *orientiert* sind. Jedes Koordinatensystem auf S_m wird danach als positiv oder negativ orientiert zu bezeichnen sein, je nachdem sein Koordinaten-m-Bein [System der m kontravarianten Massvektoren in der durch die Koordinatenindizes gegebenen Reihenfolge] denselben oder den entgegengesetzten Schraubsinn wie das Normal-m-Bein besitzt.

Nun kann man das Hyperflächenintegral auf der orientierten Hyperfläche S_m wie folgt definieren

$$\int\limits_{S_m} \Phi_{\lambda_1\ldots\lambda_m} ds^{\lambda_1\ldots\lambda_m} = \pm \int \ldots \int\limits_{L_m} \Phi_{\lambda_1\ldots\lambda_m} \frac{\partial(x^{\lambda_1}\ldots x^{\lambda_m})}{\partial(l^1\ldots l^m)} dl^1 dl^2 \ldots dl^m, \tag{8.1}$$

wo $\Phi_{\lambda_1\ldots\lambda_m} = \Phi_{[\lambda_1\ldots\lambda_m]}$ stetige Funktionen auf S_m sind und das rechts stehende Integral ein m-faches Integral im gewöhnlichen Sinne, erstreckt über ein gewisses Gebiet L_m des $(l^1, l^2, \ldots, l^m)$-Raumes ist. ***Dabei ist das Plus- oder Minuszeichen zu nehmen, je nachdem die l-Koordinaten auf S_m positif oder negativ orientiert sind.*** Da wir hier auf Regularitätsfragen nicht eingehen wollen, so sei einfach gesagt, dass das links stehende Integral dem rechts stehenden definitionsgemäss dann gleich sein soll, wenn dieses letzte existiert. In vielen Fällen, wie z. B. für geschlossene Hyperflächen oder für nur stückweise stetige Funktionen $\Phi_{\lambda_1\ldots\lambda_m}$,

[1]) Vgl. Sch. u. Str., S. 130.

wird man an Stelle des einen Integrals rechts eine Summe von Integralen desselben Typus einführen müssen, vorauf wir auch nicht näher eingehen wollen. Das worauf es uns hier hauptsächlich ankommt ist die Notwendigkeit der Einführung des Doppelvorzeichens in die Definitionsgleichung (8.1) und deren ev. Verallgemeinerungen.

Wenn man die Hyperflächenintegrale als Summen von Hyperflächenelemente definiert, so versteht es sich immer von selbst, dass das unter dem Integralzeichen stehende Hyperflächenelement $ds^{\lambda_1 \cdots \lambda_m}$ positiven Schraubsinn auf S_m besitzt.

§ 9. Beweisskizze des verallgemeinerten Stokes-Gausschen Integralsatzes

Nun sei in dem betrachteten X_n ein stetig differentiierbares kovariantes m-Vektorfeld $a_{\lambda_1 \ldots \lambda_m}$ und eine *orientierte*, ganz im Endlichen gelegene, m-dimensionale Hyperfläche S_m gegeben, deren Begrenzung durch eine ebenfalls orientierte, geschlossene $(m-1)$-dimensionale Hyperfläche S_{m-1} gebildet wird. Ferner habe S_m eine solche Form, dass in X_n ein Koordinatensystem K^* gefunden werden kann, das folgenden Bedingungen genügt: 1) S_m liegt in seiner m-dimensionalen Hyperfläche $x^{m+1} = x^{m+2} = \ldots = x^n = 0$, 2) S_m ist derart durch Schnitte in eine endliche Anzahl von Teilgebieten mit stückweise glatten Begrenzungen zerlegbar, dass jede $x^1, x^2, \ldots, x^m$-Koordinatenlinie von K^* jede dieser Begrenzungen in 0, 1 oder 2 Punkten schneidet.

Schraubsinn-Zuordnungsregel. Die Orientierungen von S_m und S_{m-1} seien so gewählt, dass in irgend einem Punkte der S_{m-1} $n^{[\varkappa} ds^{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}]}$ (oder $ds^{\varkappa \lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}}$) denselben Schraubsinn in S_m, wie $ds^{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}}$ (oder $u_\varkappa ds^{\varkappa \lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}}$) in S_{m-1} besitzt, wenn $n^\varkappa$ (oder $u_\varkappa$) ein in S_m liegender kontravarianter (oder ein S_{m-1} tangierender kovarianter) *nach aussen* von S_{m-1} gerichteter Vektor ist. Die beiden hier gegebenen Zuordungsregeln sind äquivalent, da offenbar $u_\varkappa n^\varkappa > 0$ ist.

Wer daran Anstoss finden könnte, dass S_m ausserhalb von S_{m-1} nicht definiert zu sein brauchte, der nehme statt $n^\varkappa$ einen nach innen gerichteten Vektor und nenne ihn $-n^\varkappa$.

Unter den oben gemachten Annahmen gilt bekanntlich in K^* für jede stetig differentiierbare Funktion $f = f(x^1, x^2, \ldots, x^m)$ die

folgende Formel, die man einfach durch Integration nach x^1 erhält:

$$(9.1)\qquad \underset{S_m}{\int\cdots\int} \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 \ldots dx^m \stackrel{*}{=} \underset{S_{m-1}}{\int\cdots\int} f\, dx^2 \ldots dx^m.$$

Indem man $f = a_{2\ldots m}$ setzt kann man dafür auch

$$(9.2)\qquad \int\limits_{S_m} \partial_1 a_{2\ldots m}\, ds^{1\ldots m} \stackrel{*}{=} \oint\limits_{S_{m-1}} a_{2\ldots m}\, ds^{2\ldots m}$$

und weiter

$$(9.3)\qquad \int\limits_{S_m} \partial_\lambda a_{2\ldots m}\, ds^{\lambda 2\ldots m} \stackrel{*}{=} \oint\limits_{S_{m-1}} a_{2\ldots m}\, ds^{2\ldots m}$$

schreiben. Formal entstand hier links eine Summe von n Elementen, doch verschwinden sie alle ausser dem einen für $\lambda = 1$.

Da die Koordinaten $x^1, x^2, \ldots, x^m$ alle gleichberechtigt sind, so bleibt die Formel (9.2) und daher auch (9.3) auch dann richtig, wenn man den Index 1 (unten und oben) mit irgend einem der Indizes $2, 3, \ldots, m$ vertauscht[1]). Wenn man nun die festen Indizes $2, 3, \ldots, m$ durch die von 1 bis n laufenden $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_m$ ersetzt, so entsteht dadurch links und rechts je eine $(m-1)$-fache Summe, deren Summanden alle einander gleich sind, solange unter den Zahlen $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_m$ keine der Zahlen $m+1, m+2, \ldots n$ vorkommt; wenn das aber der Fall ist, so sind sie gleich Null. Die folgende Formel ist also einfach das $(m-1)!$-fache der Formel (9.3)

$$(\mathrm{I}')\qquad \int\limits_{S_m} \partial_{\lambda_1} a_{\lambda_2\ldots\lambda_m}\, ds^{\lambda_1\ldots\lambda_m} = \oint\limits_{S_{m-1}} a_{\lambda_2\ldots\lambda_m}\, ds^{\lambda_2\ldots\lambda_m}.$$

---

[1]) Man sieht hier deutlich die Vorteile der zugrunde gelegten Schreibweise der mehrfachen Integrale mit Berücksichtigung des Schraubsinns der Integrationselemente. In den Lehrbüchern der Analysis sind gewöhnlich für $n = 2$ die folgenden zwei Formeln angegeben: $\int\int \frac{\partial Q}{\partial x} dx\, dy = \oint Q\, dy$, $\int\int \frac{\partial P}{\partial y} dx\, dy = -\oint P\, dx$. Die volle Symmetrie kann nicht in Erscheinung treten, solange man $\int\int dy\, dx = \int\int dx\, dy$ setzt.

Bis jetzt galt alles nur in dem speziell gewählten K^*-Koordinatensystem, was wir durch das Schoutensche $\overset{*}{=}$-Zeichen angedeutet haben; in der letzten Gleichung haben wir aber das Sternzeichen weglassen dürfen, da ihre beiden Seiten offensichtlich von der Wahl des Koordinatensystems unabhängige Skalare sind.

§ 10. Die vier Hauptgestalten der verallgemeinerten Stokes-Gausschen Integralsätze in X_n

Die einleitenden Annahmen und die Schraubsinn-Zuordnungsregel des vorigen Paragraphen werden hier beibehalten.

Nach Regel 2, § 4 kann man in der letzten Gleichung links unten das Alternationzeichen hinzuschreiben und dann den Rot-Operator nach (5.1) einführen. So erhält man die erste Hauptgestalt des verallgemeinerten Stokes-Gausschen Satzes in X_n:

$$\text{(I)} \qquad \frac{1}{m!}\int\limits_{S_m} \mathrm{Rot}_{\lambda_1} a_{\lambda_2\ldots\lambda_m}\, ds^{\lambda_1\ldots\lambda_m} = \frac{1}{(m-1)!}\oint\limits_{S_{m-1}} a_{\lambda_1\ldots\lambda_{m-1}}\, ds^{\lambda_1\ldots\lambda_{m-1}}.$$

Die weiteren drei Hauptgestalten entstehen daraus durch Bildung der dualen Ergänzungen der kovarianten Multivektoren oder der kontravarianten oder der beiden zugleich und Anwendung der Sätze 1 — 3 des § 4:

$$\text{(II)} \qquad \frac{1}{p!}\int\limits_{S_m} \mathrm{Div}_\varkappa \mathfrak{a}^{\lambda_1\ldots\lambda_p\varkappa}\, d\sigma_{\lambda_1\ldots\lambda_p} = \frac{1}{(p+1)!}\oint\limits_{S_{m-1}} \mathfrak{a}^{\lambda_1\ldots\lambda_{p+1}}\, d\sigma_{\lambda_1\ldots\lambda_{p+1}},$$

$$\text{(III)} \qquad \binom{n}{m}\int\limits_{S_m} \mathrm{Div}_\varkappa \mathfrak{a}^{[\lambda_1\ldots\lambda_p\varkappa}\, ds^{\lambda_{p+1}\ldots\lambda_n]} = \binom{n}{m-1}\oint\limits_{S_{m-1}} \mathfrak{a}^{[\lambda_1\ldots\lambda_{p+1}}\, ds^{\lambda_{p+2}\ldots\lambda_n]},$$

$$\text{(IV)} \qquad \binom{n}{m}\int\limits_{S_m} d\sigma_{[\lambda_1\ldots\lambda_p} \mathrm{Rot}_{\lambda_{p+1}} a_{\lambda_{p+2}\ldots\lambda_n]} = \binom{n}{m-1}\oint\limits_{S_{m-1}} d\sigma_{[\lambda_1\ldots\lambda_{p+1}}\, a_{\lambda_{p+2}\ldots\lambda_n]}.$$

Die numerischen Faktoren — die in dieser Form auch leichter zu behalten sind — wurden so geschrieben, dass die beiderseits in I und II und ebenso in III und IV stehenden Ausdrücke einander gleich sind. Sie dürfen also auch kreuzweise einander gleichgesetzt werden. Auch kann es in manchen Fällen bequem

sein eine Seite von I oder II mit einer Seite von III oder IV zusammenzustellen, was mit Hilfe des $\stackrel{d}{=}$-Zeichens geschehen kann. Symbolisch

(10.1) $$\mathrm{I} = \mathrm{II} \stackrel{d}{=} \mathrm{III} = \mathrm{IV}.$$

Auf Grund des Satzes 4, § 4 kann man noch die folgende Variante von III erhalten

(III') $$\binom{n}{m-1} \int_{S_m} \partial_\varkappa \mathfrak{a}^{[\lambda_1 \ldots \lambda_{p+1}} ds^{|\varkappa| \lambda_{p+2} \ldots \lambda_n]} = \binom{n}{m-1} \oint_{S_{m-1}} \mathfrak{a}^{[\lambda_1 \ldots \lambda_{p+1}} ds^{\lambda_{p+2} \ldots \lambda_n]},$$

die im nahen Zusammenhange mit dem Satz (208) in Schoutens Riccikalkül steht[1]).

Für $m=2$ erhalten wir aus I den verallgemeinerten Stokesschen Integralsatz[2]) in X_n

(10.2) $$\tfrac{1}{2} \int_{S_1} \mathrm{Rot}_\lambda a_\mu ds^{\lambda\mu} = \oint_{S_2} a_\lambda dx^\lambda$$

und für $m=n$ aus II und III den verallgemeinerten Gausschen Integralsatz[2]) in X_n

(10.3) $$\int_{S_n} \mathrm{Div}_\varkappa \mathfrak{a}^\varkappa d\sigma = \oint_{S_{n-1}} \mathfrak{a}^\varkappa d\sigma_\varkappa \stackrel{d}{=} n \oint_{S_{n-1}} \mathfrak{a}^{[\lambda_1} ds^{\lambda_2 \ldots \lambda_n]}.$$

§ 11. Zwei abschliessende Bemerkungen

Da die Sätze I — IV in X_n gelten, so gelten sie auch offenbar in einem Riemannschen, Euklidischen, affinem Raum u. dgl. In diesen spezialisierten Raümen entstehen aber neue Möglichkeiten, deren Besprechung nicht mehr zum Gegenstand der vorliegenden Abhandlung gehört. Es sei nur bemerkt, dass man in dem wichtigen Fall des Riemannschen Raumes verschiedene neue

---

[1]) Es ist aber zu bemerken, dass der Schoutensche Satz (208) bei »überschiebungsinvarianten, symmetrischen und inhaltstreuen Übertragung« nicht allgemein, sondern nur in speziellen Koordinaten gilt und zwar in solchen (die übrigens immer gefunden werden können), in welchen $U_{\lambda_1 \ldots \lambda_n}$ konstante Komponenten hat. In einem Riemannschen Raum sind das die, von Einstein oft gebrauchten, Koordinaten, in welchen $\sqrt{g}$ konstant ist. Das Ersetzen von w durch $\mathfrak{w}$ würde die spezielle Wahl der Koordinaten überflüssig machen.

[2]) Vgl. § 1, vorletzter Absatz.

Formen direkt aus I — IV erhalten kann, wenn man bedenkt, dass in einem Riemannschen Raum: 1) $\sqrt{g}$ mit dem veränderlichem Vorzeichen — vgl. § 3, letzter Absatz — eine skalare Dichte ist, mit deren Hilfe man aus jeder Affinordichte durch Division und aus jedem Affinorvolumen durch Multiplikation einen Affinor mit denselben Indizes in gleicher Stellung erhalten kann, 2) dass die Operatoren ∇_λ, rot und div (nicht aber ∂_λ) mit den Koeffizienten des metrischen Fundamentaltensors $g_{\mu\nu}$ und jeder Funktion dieser Koeffizienten, also auch $\sqrt{g}$, vertauschbar sind und 3) dass

$$\text{(11.1)} \qquad \mathrm{Rot}_\varkappa a_{\lambda_1 \ldots \lambda_m} = \mathrm{rot}_\varkappa a_{\lambda_1 \ldots \lambda_m}$$

und

$$\text{(11.2)} \qquad \mathrm{Div}_\varkappa \mathfrak{a}^{\lambda_1 \ldots \lambda_{p-1}\varkappa} = \mathrm{div}_\varkappa \mathfrak{a}^{\lambda_1 \ldots \lambda_{p-1}\varkappa}$$

ist. So hat man z. B. für $m = 2$

$$\text{(11.3)} \qquad \mathrm{Div}_\mu \mathfrak{a}^{\lambda\mu} = \mathrm{Div}_\mu \sqrt{g}\, a^{\lambda\mu} = \mathrm{div}_\mu \sqrt{g}\, a^{\lambda\mu} = \sqrt{g}\, \mathrm{div}_\mu a^{\lambda\mu}.$$

Beim Beweise der Formel I § 9 haben wir die Kovarianz der beiderseits auftretenden Integrale benutzt. Doch wenn einmal die Richtigkeit dieser Gleichung — und folglich auch der Gleichungen I—IV § 10—für jedes Koordinatensystem und jede Wahl der $\binom{n}{m}$ selbstständigen Funktionen $a_{\lambda_1 \ldots \lambda_m}$ oder $\mathfrak{a}^{\lambda_1 \ldots \lambda_p}$ erkannt ist, dann darf man für diese Funktionen irgend welche (genügend reguläre) neue Funktionen — die auch weitere Indizes tragen können — einsetzen, ohne über ihre Transformationsweise irgend etwas voraussetzen zu müssen. Im allgemeinen werden dann die Integrale keine »geometrische Bedeutung« haben, d. h. sie werden sich bei Koordinatentransformationen nicht wie die Bestimmungszahlen irgend eines geometrischen Objektes verhalten, dennoch werden aber die linken Seiten den rechten in jedem Koordinatensystem, für welchen die neuen Funktionen überhaupt definiert sind, gleich sein. So kann man z. B. aus (10.3) für $n = 4$ die folgende in der allgemeinen Relativitätstheorie wichtige Formel[1]) ableiten, wo $\mathfrak{T}^{\mu\nu}$ einen kontravarianten Tensor

---

[1]) Die man übrigens ebenso gut mit $T^{\mu\nu}$ wie mit $\mathfrak{T}^{\mu\nu}$ schreiben darf.

bedeuten soll:

$$\int_{S_4} \partial_\varkappa \mathfrak{T}^{\mu\varkappa} d\sigma = \oint_{\dot{S}_3} \mathfrak{T}^{\mu\varkappa} d\sigma_\varkappa \overset{d}{=} \oint_{\dot{S}_3} \mathfrak{T}^{\mu[\lambda_1} ds^{\lambda_2\lambda_3\lambda_4]}. \tag{11.4}$$

Diese Formel ist »analytisch« richtig, da sie in jedem Koordinatensystem gilt; sie hat aber keine »geometrische Bedeutung«, da sich die darin auftretenden Integrale beim Übergang von einem Koordinatensystem zu einem anderen i. allg. weder wie die 4 Komponenten eines Vektors, noch wie die 4 Komponenten irgend eines geometrischen Objektes, verhalten.

Kraków, Institut für Theoretische Physik der Jagellonischen Universität.

Sur les intégrales premières des équations différentielles ordinaires

par

T. Ważewski (Kraków)

L'hypothèse suivante interviendra constamment dans le présent travail.

Hypothèse H. Considérons, dans le domaine des variables réelles, le système d'équations

$$(1) \qquad \frac{dx_i}{dt} = A_i(x_1, \ldots, x_n), \qquad (i=1, \ldots, n;\ n>1)$$

dont les deuxièmes membres ne dépendent pas de t. Nous supposons que les fonctions A_i sont de la classe C^1 [1]) dans un ensemble ouvert Ω et que tout point de Ω est un point régulier du système (1), c.-à-d. que l'on a

$$(2) \qquad \sum_{i/1}^{n} A_i^2 > 0 \qquad \text{(dans } \Omega\text{)}.$$

Les intégrales du système (1) seront appelées *caractéristiques*. Chaque caractéristique sera considérée dans l'intervalle *saturé* (c.-à-d. le plus grand possible) de son existence et non pas dans une somme d'intervalles disjoints.

La notion de caractéristique se trouve ainsi *relativisée* par rapport au domaine dans lequel on convient d'envisager le système (1). Si ω est une partie ouverte de Ω, il peut arriver que sur une même caractéristique relative à Ω peuvent être situées plusieurs caractéristiques disjointes relatives à ω.

---

[1]) c.-à-d. possèdent des dérivées partielles continues du premier ordre.

Une fonction $f(x_1, \ldots, x_n)$ sera dite intégrale première du système (1) valable dans une partie ouverte ω de Ω lorsque 1) f est de la classe C^1 dans ω 2) la fonction f est constante le long de toute caractéristique (relative à ω) du système (1)

On sait que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction f, qui est de la classe C^1, soit une intégrale première de (1) valable dans ω, consiste en ce que l'équation

$$\sum_{i/1}^{n} A_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \tag{3}$$

soit identiquement vérifiée dans ω. La théorie des intégrales premières du système (1) coïncide donc avec celle des intégrales de l'équation aux dérivées partielles (3).

Les intégrales premières $f_1, \ldots, f_k$ valables dans ω sont dites indépendantes dans ω lorsque la matrice

$$\left\| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right\|$$

possède le rang k en chaque point de ω.

On peut, en particulier, parler d'une seule intégrale première indépendante dans ω ($k=1$).

On sait qu'à chaque point de Ω correspond (dans l'Hypothèse H) un voisinage de ce point dans lequel le système (1) admet $n-1$ intégrales premières indépendantes. Ce théorème est de *caractère local* (»im kleinen«).

C'est M. Kamke qui a, le premier, envisagé le théorème en question comme un théorème de *caractère intégral* (»im großen«) (*cf.* I)[1]).

Voici un théorème de M. Kamke sur ce sujet (*cf.* VIII et XI):

Admettons l'hypothèse H, posons $n=2$ et supposons que Ω soit simplement connexe.

Ceci étant, à tout ensemble ouvert ω qui est ***totalement contenu dans*** Ω (c.-à-d. ω est borné et sa frontière fait partie de Ω) correspond une intégrale première indépendante valable dans ω[2]).

---

[1]) Les chiffres romains se rapportent aux travaux cités dans la bibliographie qui est insérée à la fin du présent article.

[2]) L'hypothèse que Ω est simplement connexe est essentielle. Désignons, en effet, par Ω une couronne circulaire centrée à l'origine des coordonnées

Il se pose, d'une façon naturelle, la question de savoir si la suivante généralisation G du théorème précédent est juste.

(G). Si l'hypothèse H est remplie et si Ω est simplement connexe alors à chaque ensemble ouvert ω, contenu totalement dans Ω, correspond un système de $n-1$ intégrales premières indépendantes valables dans ω.

M. Kamke a montré que cette généralisation devient juste lorsque l'on admet l'hypothèse accessoire que $A_n \equiv 1$. On peut supprimer dans ce cas l'hypothèse que Ω est simplement connexe (*cf.* V).

Or j'ai signalé un exemple montrant que la généralisation G (sans aucune hypothèse accessoire) est fausse (*cf.* VII).

M. Digel a construit indépendamment, pour le même but, un exemple bien simple et allant plus loin (cet exemple est cité dans la suite).

Ces exemples conduisent au problème suivant:

Problème 1. Admettons l'hypothèse H (relativement au cas $n \geqslant 3$) et supposons que l'ensemble Ω soit simplement connexe.

Ceci posé, il s'agit de savoir quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes afin qu'à chaque ensemble ouvert ω, contenu totalement dans Ω, il corresponde un système de $n-1$ intégrales premières indépendantes et valables dans ω.

Quelles sont les conditions nécessaires pour l'existence d'un tel système d'intégrales premières?

Le but de ce travail est de nous orienter dans la nature de ces conditions. Les propositions 1, 2 et 3 fournissent certaines conditions nécessaires en question. L'exemple 2 possède un caractère topologique tout-à-fait différent de l'exemple de M. Digel.

Ces propositions et cet exemple soulignent le rôle des *caractéristiques stables au sens de Poisson* [1]), périodiques ou non, pour

---

et par ω une couronne concentrique contenue totalement dans la précédente. En posant $A_1 = x$, $A_2 = y$ $(n = 2)$, on voit que le système (1) n'admet, dans ω, aucune intégrale première indépendante. Si une telle intégrale $f(x, y)$ existait, la fonction $\lambda(\varphi) = f(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ serait monotonne au sens strict, on aurait donc $\lambda(0) \neq \lambda(2\pi)$, ce qui n'est pas possible.

Les prémisses du théorème de M. Kamke n'assurent pas l'existence d'une intégrale première indépendante et valable dans Ω tout entier (*cf.* IV).

[1]) Soit $x_i = x_i(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$ ou plus brièvement $P = P(t)$ une caractéristique du système (1). Cette caractéristique (appelons-la C) sera dite *stable au sens*

la solution du Problème 1. Nous proposons quelques problèmes en montrant leur rapport au Problème 1. La Proposition 4 établit l'équivalence de certaines trois conditions. Il paraît probable que ce soient les conditions nécessaires et suffisantes dont il s'agit dans le Problème 1.

§ 1. Voici d'abord un lemme.

Lemme 1. Conservons l'hypothèse H. Soit M un point de Ω et soit Π un hyperplan à $n-1$ dimensions passant par M, un hyperplan qui n'est pas tangent en ce point à la caractéristique $C(M)$ issue de ce point.

Supposons qu'à chaque voisinage de M corresponde une caractéristique coupant le plan Π suivant un ensemble de points dont deux (différents entre eux) au moins sont situés dans ce voisinage.

Ceci étant, le système (1) ne peut pas admettre $n-1$ intégrales premières indépendantes valables dans Ω.

Démonstration. Désignons par $m_1, \ldots, m_n$ les coordonnés, de M et par $\lambda_j^1, \ldots, \lambda_j^n$ $(j=1, \ldots, n-1)$ les coordonnées de $n-1$ vecteurs indépendants situés dans le plan Π. L'équation paramétrique de ce plan a la forme

$$x_i = m_i + \sum_{j/1}^{n-1} \lambda_j^i u_j \qquad (i=1, \ldots, n).$$

Nous écrirons ce système d'équations sous la forme abrégée

$$x_i = \varphi_i(u_1, \ldots, u_{n-1}) \qquad (i=1, \ldots, n).$$

Le plan Π n'étant pas tangent en M à la caractéristique $C(M)$, on aura

$$\begin{vmatrix} A_1(M), \ldots, A_n(M) \\ \lambda_1^1, \ldots, \lambda_1^n \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \lambda_{n-1}^1, \ldots, \lambda_{n-1}^n \end{vmatrix} \neq 0.$$

---

de Poisson lorsqu'elle jouit des propriétés suivantes: 1) elle est définie dans l'intervalle $-\infty < t < +\infty$ tout entier, 2) à chaque point M de C correspondent deux suites $t_\nu \to +\infty$ et $\tau_\nu \to -\infty$, telles que $P(t_\nu) \to M$ et $P(\tau_\nu) \to M$. Une caractéristique est dite *périodique* lorsque les fonctions $x_i(t)$ $(i=1, \ldots, n)$ possèdent une période positive commune. Ceci revient à ce que C constitue un orbe fermé de Jordan. Les caractéristiques périodiques sont stables au sens de Poisson mais la réciproque n'est pas vraie.

Supposons, par impossible, que le système (1) admette $n-1$ intégrales premières $f_i(x_1, \dots, x_n)$ $(i=1, \dots, n-1)$ indépendantes et valables dans Ω. Posons

$$k_i(u_1, \dots, u_{n-1}) = f_i(\varphi_1, \dots, \varphi_n).$$

On vérifie facilement qu'au point M (c.-à-d. pour $u_1 = u_2 = \dots = u_{n-1} = 0$), on a

$$\frac{D(k_1, \dots, k_{n-1})}{D(u_1, \dots, u_{n-1})} \neq 0.$$

La transformation

$$K_j = k_j(u_1, \dots, u_{n-1}) \qquad (j = 1, \dots, n-1)$$

fait donc correspondre à deux points $(u_1, \dots, u_{n-1})$ différents et suffisamment voisins du point $u_1 = \dots = u_{n-1} = 0$ deux points $K_1, \dots, K_{n-1}$ différents. On aura donc

$$(4) \qquad \sum_{j/1}^{n-1} [k_j(\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_{n-1}) - k_j(\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{n-1})]^2 > 0$$

lorsque l'on aura

$$\sum (\hat{u}_j - \bar{u}_j)^2 > 0$$

et lorsque les points $(\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_{n-1})$ et $(\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{n-1})$ seront suffisamment voisins du point $u_1 = u_2 = \dots u_{n-1} = 0$. Or, conformément à l'hypothèse de notre lemme, il existe deux suites de points P_ν et Q_ν $(P_\nu \neq Q_\nu)$ et une suite de caractéristiques C_ν telles que P_ν et Q_ν font partie de l'intersection de C_ν avec le plan Π et qu'en outre on a $P_\nu \to M$, $Q_\nu \to M$.

Les fonctions f_i étant constantes le long de C_ν, on aura

$$f_i(P_\nu) = f_i(Q_\nu) \qquad (i = 1, \dots, n-1),$$

ce qui pourra être écrit sous la forme

$$(5) \qquad k_i(\bar{u}_1^\nu, \dots, \bar{u}_{n-1}^\nu) = k_i(\hat{u}_1^\nu, \dots, \hat{u}_{n-1}^\nu)$$

où

$$\sum_j (\hat{u}_j^\nu - \bar{u}_j^\nu)^2 > 0, \quad \hat{u}_j^\nu \to 0, \quad \bar{u}_j^\nu \to 0.$$

On aboutit ainsi à une contradiction, car les relations (5) sont incompatibles avec les relations (4).

Voici quelques conséquences de ce Lemme.

Proposition 1. Conservons l'hypothèse H. Soient ω_1 et ω_2 deux ensembles ouverts tels que ω_1 soit contenu totalement dans ω_2, et ω_2 soit contenu dans Ω. Supposons qu'une au moins des conditions suivantes, W_1 et W_2, ait lieu.

W_1) L'ensemble $\overline{\omega}_1$[1]) contient au moins une *demi-caractéristique*[2]) J (relative à ω_2) telle que l'ensemble $\bar{J}-J$ ne soit pas vide.

W_2) L'ensemble $\overline{\omega}_1$ contient au moins une caractéristique C (relative à ω_2) qui est stable au sens de Poisson et non périodique.

Ceci étant, le système (1) ne peut pas admettre $n-1$ intégrales premières indépendantes et valables dans ω_2.

Démonstration. Supposons que la condition W_1 soit vérifiée. Soit M un point de $\bar{J}-J$ et désignons par $C(M)$ la caractéristique (relative à ω_2) issue de ce point. Construisons le plan Π de la même façon que dans le Lemme 1. L'ensemble des points communs à J et Π admettra le point M comme point d'accumulation. On déduit du lemme 1 que la thèse de notre proposition est juste.

Supposons maintenant que la condition W_2 soit vérifiée. Choisissons sur C un point M et construisons le plan Π comme tout-à-l'heure.

Le point M constituera un point d'accumulation de l'ensemble des points communs à C et Π.

On en déduit, en vertu du Lemme 1, que notre proposition est juste.

Remarque 1. Si Ω contient au moins une caractéristique (relative à Ω) stable au sens de Poisson et non périodique, alors le

---

[1]) Nous désignerons par $\overline{B}$ l'ensemble composé de B et de la frontière de B.

[2]) Soit $x_i = x_i(t)$ $(i=1, \dots, n)$ ou plus brièvement $P=P(t)$ une caractéristique (appelons-la C) relative à ω_2. Soit $\alpha<t<\beta$ l'intervalle *saturé* dans lequel cette caractéristique (relative à ω_2!) est définie. Soit $\alpha<t_0<\beta$. Si t parcourt l'intervalle $\alpha<t\leqslant t_0$ (ou l'intervalle $t_0\leqslant t<\beta$) alors $P(t)$ décrit une trajectoire appelée *demi-caractéristique* (relative à ω_2). Cette demi-caractéristique J est identique à C lorsque C est une caractéristique périodique et seulement dans ce cas. On a alors $J=\overline{J}=C$, $\overline{J}-J=0$.

système (1) ne peut pas possèder $n-1$ intégrales premières indépendantes et valables dans Ω tout entier.

On le démontre de la même façon que la deuxième partie de la proposition précédente.

Remarque 2. Si le système (1) admet une demi-caractéristique J (relative à Ω) telle que $\bar{J}-J \neq 0$, alors le système peut admettre, quand même, $n-1$ intégrales premières indépendantes valables dans Ω. On peut prendre p. ex. l'intérieur d'une sphère à n dimensions comme ensemble Ω et poser, dans le système (1), $A_1 \equiv A_2 \equiv A_{n-1} \equiv 0$, $A_n \equiv 1$. On observera que pour chaque demi-caractéristique (relative à Ω) de ce système on aura $\bar{J}-J \neq 0$. L'ensemble $\bar{J}-J$ fera partie de la frontière de Ω ce qui n'est pas possible lorsque la condition W_1 de la Proposition 1 est vérifiée.

Proposition 2. Conservons l'hypothèse H. Supposons qu'une caractéristique C (relative à Ω) soit périodique, c.-à-d. affecte la forme d'un orbe de Jordan.

Supposons en plus que le système (1) admette $n-1$ intégrales premières indépendantes valables dans un voisinage V de C.

Ceci étant supposé, toute caractéristique issue d'un voisinage V de C est périodique et la période d'une caractéristique issue d'un point variable P tend vers la période de C lorsque le point P tend vers la caractéristique C.

Démonstration. Supposons que la première partie de notre proposition soit fausse. Il existerait donc une suite de points N_ν tendant vers un point N de C, tels que la caractéristique C_ν passant par N_ν n'affecterait pas la forme d'un orbe de Jordan. Soit M un autre point de C ($M \neq N$) et soit Π un plan passant par M, sans y être tangent à C.

Désignons par P_ν et Q_ν les points en lesquels on rencontre pour la première fois le plan Π en se déplaçant sur C_ν (à partir de N_ν) dans les deux sens. On sait que pour les ν suffisamment grands les points P_ν et Q_ν existent et que $P_\nu \to N$, $Q_\nu \to N$ [1]).

[1]) *Cf.* E. Kamke, *Differentialgleichungen reeller Funktionen*, p. 204—207, *Hilfssätze* 1, 2, 3. Les démonstrations y sont faites dans le cas $n=2$, mais ces »*Hilfssätze*« sont aussi justes dans le cas $n \geqslant 3$. Afin de s'en convaincre, il suffit d'observer que la démonstration du »*Hilfssatz*« 2 peut être facilement remaniée de façon à éviter l'usage des polygones.

La caractéristique C_ν n'étant pas un orbe de Jordan, on a $P_\nu \neq Q_\nu$ ce qui n'est pas possible en raison du Lemme 1.

Si la deuxième partie de notre proposition n'était pas juste, on démontrerait facilement[1]) que $P_\nu \neq Q_\nu$, ce qui conduirait, comme tout-à-l'heure, à une contradiction.

Corollaire. Si le système (1) admet une seule caractéristique périodique C, ce système ne peut pas admettre $n-1$ intégrales premières indépendantes valables dans un voisinage (aussi petit qu'il soit) de C.

Les propositions précédentes concernent le problème d'existence de $n-1$ intégrales premières indépendantes du système (1). Voici une remarque évidente concernant l'existence d'une intégrale indépendante au moins de ce système.

Remarque 3. Conservons l'hypothèse H. Supposons que le système (1) admette une intégrale périodique C telle qu'à chaque voisinage V de C corresponde un voisinage partiel V_1 de C jouissant de la propriété suivante: Par chaque point de $V_1 - C$ il passe au moins une demi-caractéristique J (relative à V) telle que $\bar{J} - J$ contienne au moins un point de C.

Ceci étant, le système (1) n'admet aucune intégrale première indépendante valable dans un voisinage (si petit qu'il soit) de C.

Soit en effet $f(x_1, \ldots, x_n)$ une intégrale première de (1) valable dans le voisinage V. Afin de démontrer que cette intégrale ne peut pas être indépendante dans V, il suffit de prouver qu'elle est constante dans V_1.

La fonction f prend évidemment une même valeur k en tout point de C. Soit P un point quelconque de V_1. Par ce point il passe une demi-caractéristique J (relative à V) telle que $\bar{J} - J$ contient au moins un point de C. La fonction f étant constante sur J, on a $f \equiv l$ (sur J). Il existe sur J une suite de points Q_ν tendant vers un point Q de C. On a $f(Q_\nu) \to f(Q)$ d'où il résulte que $k = l$. On a donc $f(P) = k$, ce qui prouve que f est constante dans V_1.

---

[1]) On aura à s'appuyer sur les mêmes »*Hilfssätze*« que plus haut. Il y aura à observer que le nombre Δ intervenant dans le »*Hilfssatz*« 3 peut être fait si petit qu'on le veut.

Exemple de M. Digel (*cf.* XI, p. 288)[1]). Considérons le système

$$(6) \quad \frac{dx}{dt}=(1-x^2-y^2)x-y, \quad \frac{dy}{dt}=(1-x^2-y^2)y+x, \quad \frac{dz}{dt}=-2z.$$

Désignons par Ω l'ensemble simplement connexe que l'on obtient, à partir de l'espace tout entier, en supprimant les points $z\leqslant 0$ de l'axe des z.

On voit que le système précédent vérifie l'hypothèse H dans l'ensemble simplement connexe Ω.

Introduisons des coordonnées cylindriques par les formules

$$x=r\cos\varphi, \quad y=r\sin\varphi, \quad z=\zeta.$$

Le systéme (6) pourra être alors mis sous la forme

$$\frac{dr}{dt}=r(1-r^2), \qquad \frac{d\zeta}{dt}=-2\zeta, \qquad \frac{d\varphi}{dt}=1.$$

La caractéristique de ce système qui pour $t=0$ prend les valeurs $r=r_0\geqslant 0$, $\zeta=\zeta_0$, $\varphi=\varphi_0$ a la forme

$$r=\frac{r_0}{\sqrt{r_0^2+(1-r_0^2)e^{-2t}}}, \quad \zeta=\zeta_0 e^{-2t}, \quad \varphi=\varphi_0+t.$$

La caractéristique correspondant à $r_0=1$, $\zeta_0=0$, $\varphi_0=0$ est périodique, — c'est la circonférence C

$$r=1, \quad \zeta=0, \quad \varphi=t \qquad \text{(Circonférence } C\text{)}.$$

Lorsque l'on prend un point quelconque $r_0>0$, ζ_0, φ_0 qui n'est pas situé sur cette circonférence, alors la demi-caractéristique J issue de ce point et correspondant aux $t\geqslant 0$ tend vers cette circonférence C (en s'approchant toujours de cette circonférence) en même temps que $t\to+\infty$. On a évidemment $\bar{J}-J=C\neq 0$. En vertu de la Remarque 3 le système (6) n'admet aucune intégrale première indépendante valable dans un voisinage (quelque petit qu'il soit) de C.

L'analyse de cet exemple m'a conduit à la proposition qui suit.

---

[1]) J'ai pris connaissance de cet exemple avant qu'il n'ait été publié, grâce à une communication de M. Kamke à qui j'en présente mes meilleurs remercîments.

Proposition 3. Conservons l'hypothèse H et supposons que $n=3$. Supposons que le système (1) admette une caractéristique périodique C et supposons qu'il existe une membrane M de la classe C^1 [1]), contenue dans Ω, possédant la caractéristique C pour bord, et telle que l'intérieur de cette membrane, c.-à-d. l'ensemble $M-C$, représente une surface sans contact [2]). Supposons que la membrane M appartienne à une partie ouverte ω de Ω.

Ceci étant supposé, le système (1) n'admet pas une seule intégrale première indépendante valable dans ω.

Ceci provient de ce qu'à chaque intégrale première $f(x_1, x_2, x_3)$ valable dans ω il correspond, dans les hypothèses précédentes, un point x_1^0, x_2^0, x_3^0 situé sur M, tel que

$$f_{x_i}(x_1^0, x_2^0, x_3^0)=0, \qquad (i=1,2,3).$$

Démonstration. Nous pouvons supposer, sans restreindre la généralité des raisonnements, que les équations de la membrane ont la forme

(7) $$x_i=\varphi^i(u,v) \qquad (i=1,2,3)$$

et que les paramètres u, v varient dans le cercle

(8) $$u^2+v^2\leqslant 1.$$

On peut aussi supposer que le point (x_1, x_2, x_3) décrit la caractéristique C lorsque le point (u,v) décrit la circonférence

(9) $$u^2+v^2=1.$$

Les fonctions φ^i sont, par hypothèse, continues dans le cercle (8) et sont de classe C^1 à l'intérieur de ce cercle, c.-à-d. dans le cercle ouvert

(10) $$u^2+v^2<1.$$

L'hypothèse que $M-C$ constitue une surface sans contact exprime que, dans le cercle ouvert (10), le déterminant suivant n'est pas nul

(11) $$\begin{vmatrix} A^i(\varphi^1(u,v), \varphi^2(u,v), \varphi^3(u,v)) \\ \varphi^i_u(u,v) \\ \varphi^i_v(u,v) \end{vmatrix} \neq 0.$$

---

[1]) La signification de ce terme deviendra claire au cours de la démonstration qui suit.

[2]) Ceci veut dire que P étant un point quelconque de $M-C$, cette surface n'est pas tangente en ce point à la caractéristique issue de P.

Soit $f(x_1, x_2, x_3)$ une intégrale première du système (1) valable dans ω. Considérons la fonction auxiliaire

$$\psi(u,v)=f(\varphi^1(u,v),\ \varphi^2(u,v),\ \varphi^3(u,v)).$$

Cette fonction est constante sur la circonférence (9) parce que f est constante le long de la caractéristique C. La fonction ψ prend donc sa valeur maxima (ou minima) en un point (u^0, v^0) du cercle ouvert (10). On a en ce point

$$\psi_u(u^0, v^0)=\psi_v(u^0, v^0)=0.$$

En posant

(12) $$x_i^0=\varphi^i(u^0, v^0),$$

nous aurons

(13) $$\begin{cases} \psi_u(u^0, v^0)=\sum_i f_{x_i}(x_1^0, x_2^0, x_3^0)\,\varphi_u^i(u^0, v^0)=0, \\ \psi_v(u^0, v^0)=\sum_i f_{x_i}(x_1^0, x_2^0, x_3^0)\,\varphi_v^i(u^0, v^0)=0. \end{cases}$$

On a dans ω l'identité

$$\sum_i A_i(x_1, x_2, x_3)\, f_{x_i}(x_1, x_2, x_3)\equiv 0$$

donc en particulier (*cf.* (12))

(14) $$\sum_i f_{x_i}(x_1^0, x_2^0, x_3^0)\, A_i(\varphi^1(u^0, v^0), \varphi^2(u^0, v^0), \varphi^3(u^0, v^0))=0.$$

Il résulte des relations (11), (13), (14) que

$$f_{x_i}(x_1^0, x_2^0, x_3^0)=0 \qquad (i=1, 2, 3).$$

Notre proposition se trouve ainsi démontrée parce que le point (x_1^0, x_2^0, x_3^0) appartient à la membrane M.

Voici maintenant un exemple possédant un autre caractère topologique que l'exemple de M. Digel.

Exemple 2[1]. Considérons le système

(15) $$x'(t)=-y,\quad y'(t)=x,\quad z'(t)=x^2+y^2-1.$$

Ce système sera envisagé dans l'espace tout entier, donc dans un ensemble ouvert et simplement connexe. Tous les points de l'es-

[1] Cet exemple a été construit, il y a quelques années, par M. Bielecki pour un autre but et notamment pour montrer que la présence des caractéristiques périodiques n'entraîne pas l'existence de points singuliers (Ω simplement connexe).

pace sont réguliers relativement à ce système, car pour un point singulier on devrait avoir

$$-y=0,\quad x=0,\quad x^2+y^2-1=0,$$

ce qui n'est pas possible.

Toutes les caractéristiques de ce système sont contenues dans les formules

$$x=r\cos t,\quad y=r\sin t,\quad z=(r^2-1)\,t+k$$
$$(r\geqslant 0,\quad -\infty<k<+\infty).$$

Pour $r=0$ on obtient une droite (l'axe des z), pour $r=1$ une famille de circonférences et pour les autres valeurs de r des hélices.

Désignons par C la caractéristique circulaire

$$x=\cos t,\quad y=\sin t,\quad z=0$$

et désignons par M la membrane circulaire suivante ayant cette caractéristique pour bord

$$x^2+y^2\leqslant 1,\quad z=0.$$

On vérifie facilement que $M-C$ est une surface sans contact[1]).

Soit ω un ensemble ouvert quelconque contenant la membrane M.

En s'appuyant sur la Proposition 3, on conclut immédiatement que notre système ne peut admettre aucune intégrale première indépendante et valable dans ω.

Voici deux propriétés topologiques de cet exemple, propriétés dont ne jouit pas l'exemple de M. Digel.

On vérifie d'abord facilement que pour chaque demi-caractéristique du système (15) on a $\bar{J}-J=0$.

La seconde différence consistera en ce qu'à chaque caractéristique du système (15), il correspond un voisinage de cette caractéristique dans lequel ce système admet une intégrale première indépendante.

En effet: la fonction

$$f(x,y,z)=x^2+y^2$$

représente une intégrale première qui est indépendante au voisinage de chaque caractéristique pour laquelle $r>0$.

---

[1]) En se servant des notations de la Proposition 3 on aura $\varphi^1(u,v)\equiv u$, $\varphi^2(u,v)\equiv v$, $\varphi^3(u,v)\equiv 0$. Le déterminant (11) prendra la valeur u^2+v^2-1 qui n'est pas nulle dans le cercle ouvert (10).

Il reste le cas $r=0$, c.-à-d. le cas de la caractéristique coïncidant avec l'axe des z.

Afin de prouver l'existence d'une intégrale première indépendante et valable dans un voisinage de l'axe des z, envisageons le système (15) dans l'ensemble ouvert

$$x^2+y^2<1, \quad -\infty<z<+\infty.$$

Le système (15) peut être alors mis sous la forme

$$\frac{dx}{dz}=-\frac{y}{x^2+y^2-1}, \quad \frac{dy}{dz}=\frac{x}{x^2+y^2-1}.$$

En vertu d'un théorème de M. Kamke (*cf.* V) ce système (et, par conséquent, aussi le système (15)) admet une (et même deux) intégrale première indépendante valable dans l'ensemble

$$x^2+y^2<b, \quad 0<b<1, \quad -\infty<z<+\infty.$$

§ 2. Les considérations qui précèdent fournissent quelques renseignements sur les conditions qui sont nécessaires pour que le Problème 1 admette une réponse affirmative.

L'exemple précédent montre que certaines conditions (l'absence de demi-caractéristiques J pour lesquelles $\bar{J}-J\neq 0$) ne suffisent pas pour la réponse affirmative de ce problème.

Voici quelques problèmes qui surgissent naturellement à partir des considérations précédentes.

Problème 2. Conservons l'hypothèse H et supposons que Ω soit simplement connexe.

Supposons que le système (1) admette une caractéristique périodique.

Est-ce que, dans ces hypothèses, le système ne peut pas admettre $n-1$ (ou même $n-2$) intégrales premières indépendantes dans un certain ensemble ouvert ω contenu totalement dans Ω?

Ce problème se rattache au problème suivant:

Problème 3. Soient $f_i(x_1, \ldots, x_n)$ $(i=1, \ldots, n-1)$ $n-1$ fonctions de classe C^1 indépendantes dans un ensemble simplement connexe[1]) Ω.

---

[1]) La réponse à ce problème est négative lorsque Ω n'est pas simplement connexe.

Est-ce qu'il existe une fonction $f_n(x_1, ..., x_n)$ de classe C^1 dans Ω, telle que la transformation

$$(16) \qquad y_j = f_j(x_1, ..., x_n), \qquad (j=1, ..., n)$$

soit biunivoque dans Ω et telle que l'on ait dans Ω

$$\frac{D(f_1, ..., f_n)}{D(x_1, ..., x_n)} \neq 0?$$

La réponse affirmative à cette question entraînerait la conséquence suivante:

Conséquence 1. Gardons l'hypothèse H et supposons que Ω soit simplement connexe. Supposons ensuite que le système (1) admette dans chaque ensemble ouvert ω (contenu totalement dans Ω) un système de $n-1$ intégrales premières indépendantes. Ceci étant supposé, chaque caractéristique relative à un tel ω tend vers la frontière de ω. Le système (1) n'admet donc aucune caractéristique périodique.

Afin de ramener cette Conséquence au Problème 3, supposons que le Problème 3 admette une réponse affirmative et envisageons un ensemble quelconque ω (contenu totalement dans Ω).

Il existe évidemment un ensemble ω_1 ouvert et simplement connexe tel que 1) ω est contenu totalement dans ω_1 et 2) ω_1 est contenu totalement dans Ω.

Soit $f_i(x_1, ..., x_n)$ $(i=1, ..., n-1)$ un système de $n-1$ intégrales premières indépendantes valables dans ω_1. Choissisons la fonction $f_n(x_1, ..., x_n)$ de la manière présentée dans l'énoncé du Problème 3. En appliquant au système (1) la transformation (16), on obtiendra le système

$$(17) \qquad \frac{dy_i}{dy_n} = 0 \qquad (i=1, ..., n-1).$$

Chaque caractéristique de ce système tend évidemment vers la frontière de l'ensemble $\tilde{\omega}_1$ qui constitue l'image de ω_1 par l'intermédiaire de la transformation (16). Il s'ensuit que chaque caractéristique du système (1) relative à ω_1 tend vers la frontière de ω_1. Il en résulte facilement qu'aussi chaque caractéristique relative à ω tend vers la frontière de ω.

Si le système (1) admettait une caractéristique périodique C, cette caractéristique serait contenue dans un ensemble ω et le système (17) admettrait une caractéristique périodique, ce qui n'est pas possible.

La Conséquence 1 du Problème 3 fournirait ainsi une condition nécessaire pour que le Problème 1 admette une réponse affirmative. Elle suggère le problème suivant se rapportant à la condition nécessaire et suffisante intervenant dans le Problème 1.

Problème 4. Le théorème suivant est-il vrai?

»En conservant l'Hypothèse H, supposons que Ω soit simplement connexe. Ceci étant, la condition nécessaire et suffisante afin que le système (1) admette, dans chaque ensemble ouvert ω (contenu totalement dans Ω), $n-1$ intégrales premières indépendantes consiste en ce que chaque caractéristique (relative à un tel ω) tende vers la frontière de ω«.

Remarque 4. On peut observer sur des exemples faciles à construire que la condition intervenant dans le problème précédent n'est ni nécessaire[1]) ni suffisante[2]) lorsque Ω n'est pas simplement connexe.

Il sera peut-être bon de rappeler que dans le cas où l'Hypothèse H est vérifiée, Ω est simplement connexe et $n=2$, chaque caractéristique tend vers la frontière de Ω[3]). Dans ce cas, le Problème 4 admet une réponse affirmative d'après un théorème de M. Kamke (*cf.* VIII, p. 56).

Voici enfin une proposition qui jette une certaine lumière sur le rapport du Problème 4 aux considérations précédentes du présent travail.

Proposition 4. Conservons l'Hypothèse H et supposons que Ω soit borné. Ceci étant admis, les conditions suivantes E_1, E_2 et E_3 sont équivalentes entre elles.

---

[1]) Dans le cas: $\frac{dx}{dt}=-y$, $\frac{dy}{dt}=x$, $\frac{dz}{dt}=0$, Ω=espace dont on a exclu l'axe des z, les fonctions $f_1=x^2+y^2$, $f_2=z$ constituent des intégrales premières indépendantes. Les caractéristiques sont des circonférences, elles ne tendent pas vers la frontière de l'ensemble ω défini par les inégalités $0<a<x^2+y^2<b$.

[2]) Voir l'exemple inséré à la note [2]) au bas de la page 146.

[3]) *Cf.* VIII. Hilfssatz 1, p. 57.

E_1) Si ω est un ensemble ouvert contenu totalement dans Ω, alors toute demi-caractéristique relative à ω tend vers la frontière de ω.

E_2) Aucun ensemble ouvert ω contenu totalement dans Ω n'englobe aucune caractéristique (relative à ω) stable au sens de Poisson.

E_3) Aucun ensemble ouvert ω contenu totalement dans Ω n'englobe ni aucune caractéristique (relative à ω) périodique, ni aucune demi-caractéristique (relative à Ω) J telle que $\bar{J}-J \neq 0$.

Démonstration. Si la condition E_1 a lieu, les conditions E_2 et E_3 sont évidemment remplies. Il reste à prouver que si la condition E_1 n'est pas remplie, aucune des conditions E_2 et E_3 ne peut avoir lieu.

Supposons donc que la condition E_1 ne soit pas vérifiée. Il existe alors un ensemble ouvert ω (contenu totalement dans Ω) et une demi-caractéristique J (relative à ω) qui ne tend pas vers la frontière de ω. On vérifie facilement que J est aussi une demi-caractéristique relative à Ω. Il s'ensuit en vertu d'un théorème connu[1]) que l'ensemble $\overline{\omega}$ renferme au moins une caractéristique C (relative à Ω) qui est stable au sens de Poisson.

Or il existe évidemment un ensemble ouvert ϑ qui est contenu totalement dans Ω et qui englobe $\overline{\omega}$. La caractéristique C (stable au sens de Poisson) est évidemment une caractéristique relative à ϑ. La condition E_2 n'est donc pas remplie.

Si la caractéristique C est périodique, la condition E_3 n'a pas lieu. Si C est stable et non périodique, C peut être considéré comme somme de deux demi-caractéristiques J_1 et J_2 issues d'un même point M.

On a évidemment $J_2 - M \subset \bar{J}_1 - J_1$, ce qui prouve que $\bar{J}_1 - J \neq 0$. La condition E_3 n'est donc pas remplie.

Bibliographie

I. E. Kamke. *Zur Theorie der Differentialgleichungen* (Math. Annalen T. 99 (1928), p. 602).

II. E. Kamke. *Differentialgleichungen reeller Funktionen* (Leipzig 1930), p. 313 s. s.

---

[1]) *Cf.* p. e. T. Ważewski. *Sur la stabilité des intégrales d'un système d'équations différentielles* (C. R. Paris, mai 1932, p. 1786).

III. W. Wilkosz. *Sur l'intégrale fondamentale de l'équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre* (Annales de la Soc. Polon. de Math. T. X (1932), p. 94).

IV. T. Ważewski. *Sur un problème du caractère intégral relatif à l'équation* $\frac{\partial z}{\partial x}+Q(x,y)\frac{\partial z}{\partial y}=0$ (Mathematica T. VIII (Cluj 1933), p. 103).

V. E. Kamke. *Über die homogene partielle Differentialgleichung erster Ordnung* (Jahresbericht d. deutschen Mathematiker-Vereinigung T. 44 (1934), p. 156).

VI. H. H. Alden. *Solution of* $f(x,y)\frac{\partial z}{\partial x}+g(x,y)\frac{\partial z}{\partial y}=0$ *in a neighborhood of a singular point* (American Journal of Mathematics T. 56 (1934), p. 593).

VII. T. Ważewski. *Sur les intégrales premières de l'équation* $P(x,y)dx+ +Q(x,y)dy=0$ (Mathematica T. IX (Cluj 1935), p. 179).

VIII. E. Kamke. *Über die partielle Differentialgleichung* $f(x,y)\frac{\partial z}{\partial x}+ +g(x,y)\frac{\partial z}{\partial y}=h(x,y)$ (Math. Zeitschrift T. 41 (1936), p. 56).

IX. T. Ważewski[1]). *Quelques propriétés de caractère intégral de l'équation* $P(x,y)\frac{\partial z}{\partial x}+Q(x,y)\frac{\partial z}{\partial y}=0$ (C. R. du Congrès International des Mathématiciens, Oslo 1936, T. II, p. 49).

X. E. Digel. *Über die Existenz von Integralen der partiellen Differentialgleichung* $f(x,y)\frac{\partial z}{\partial x}+g(x,y)\frac{\partial z}{\partial y}=0$ *in der Umgebung eines singulären Punktes* (Math. Zeitschrift T. 42 (1937), p. 231).

XI. E. Kamke. *Über die partielle Differentialgleichung* $f(x,y)\frac{\partial z}{\partial x}+ +g(x,y)\frac{\partial z}{\partial y}=h(x,y)$, (II). (Math. Zeitschrift T. 42 (1937), p. 287).

[1]) Je profite de l'occasion pour rectifier une faute s'étant faufilée pendant l'impression de cet article. À la page 50, ligne 9 d'en haut on doit supprimer les mots: de branchement.

α-Matrizen und Clifford-Zahlen

von

Duwid Wajnsztejn (Kraków)

In der Note: »*Über die Clifford-Lipschitzschen hyperkomplexen Zahlensysteme*« [1]) haben wir bewiesen, dass es ein Isomorphismus unter den Clifford-Zahlen und den α-Matrizen stattfindet. Jetzt werden wir die α-Matrizen näher untersuchen. Wir behalten die Bezeichnungen aus [1] und führen noch folgende Symbole ein.

1. Es sei eine Matrix A vom Grade n

(1) $$A = \|a_{ik}\| \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

gegeben.

Wir bezeichnen mit a_i einen *Vektor* mit den n Komponenten

(2) $$a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Es besteht die Gleichung

(3) $$AA^* = \|a_i \times a_k\| \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

wo der Zeichen $\times$ die *skalare (innere)* Multiplikation der Vektoren a_i und a_k bezeichnet

(4) $$a_i \times a_k = a_{i1}a_{k1} + a_{i2}a_{k2} + \ldots + a_{in}a_{kn} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

2. Eine Matrix nennen wird *orthogonal*, wenn jeder von ihren Vektoren a_i auf den übrigen $n-1$ Vektoren a_k ($i = 1, 2, \ldots, n$; $k = 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n$) orthogonal ist

(5) $$a_i \times a_k = 0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n;\ i \neq k).$$

---

[1]) Diese Annalen. S. 65—83. Im weiteren wird diese Note mit dem Zeichen [1] zitiert.

Ist die Matrix (1) orthogonal, so ist

(6) $$AA^* = \|N(a_i) \cdot \delta_{ik}\| \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

eine ***diagonale*** Matrix, wo $N(a_i)$ die Norm von a_i

(7) $$N(a_i) = a_i \times a_i = a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + \ldots + a_{in}^2$$

bezeichnet und wo δ_{ik} Kroneckers Delten sind.

3. Ist die Matrix (1) gegeben, so bilden wir die Matrix

(8) $$A_N = \left\| \frac{a_{ik}}{|a_i|} \right\|$$

und nennen sie die *normierte* Matrix, wo

(9) $$|a_i| = \sqrt{a_i \times a_i}$$

den Betrag von a_i bezeichnet.

4. Ist die Matrix (1) orthogonal, so ist die Matrix (8) *unitär*, denn die Vektoren $(a_i)_N$ der Matrix (8) sind[1]) normiert und auf den übrigen $(n-1)$ Vektoren orthogonal.

§ 1. Orthogonale und unitäre α-Matrizen

5. Wir untersuchen die orthogonalen α-Matrizen. Es sei

(10) $$A = \|a_{ik}\| \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, 2^n)$$

eine α-Matrix vom Grade 2^n gegeben. Die Forderung, dass die Matrix (10) orthogonal sei ist den $2^{n-1}(2^n-1)$ Gleichungen

(5′) $$a_i \times a_k = 0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, 2^n; i \neq k)$$

äquivalent.

Sind die Gleichungen (5′) unabhängig? Darauf bekommen wir eine negative Antwort. Nach [1].6 ist A^* zusammen mit A eine α-Matrix[2]) und deshalb nach [1].10 ist

(11) $$AA^* = \|b_{11}, b_{12}, \ldots, b_{12^n}\|$$

---

[1]) Aurel Wintner. *Spektraltheorie der unendlichen Matrizen.* Leipzig 1929. S. 8—10.

[2]) Die in [1].6 angegebene Formel $(A^*)' = (A')^*$ ist falsch; der Satz aber ist richtig. Den Beweis führt man rekursiv für den allgemeineren Fall: *Sind A und B' α-Matrizen, so sind auch A^* und $(B^*)'$ α-Matrizen.*

als Produkt von zwei α-Matrizen selbst auch eine α-Matrix. Nehmen wir ([1]. 3) in Acht, dass eine α-Matrix durch die Elemente der ersten Zeile vollständig bestimmt ist, so kommen wir zum Schluss, dass man (5′) mit den 2^n-1 Gleichungen

$$b_{12} = b_{13} = \ldots = b_{12^n} = 0 \tag{12}$$

vertreten braucht.

Nach (3) ist

$$b_{1k} = \mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, 2^n)$$

also die Gleichungen (12) bekommen die Form

$$\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_k = 0 \qquad (k = 2, 3, \ldots, 2^n). \tag{13}$$

Wir haben also die Bedingung, dass die α-Matrix (10) orthogonal sei, auf 2^n-1 Gleichungen reduziert.

Wir fragen wieder: Sind die Gleichungen (13) unabhängig? Auch auf diese Frage kommt eine negative Antwort. Auf Grund des Hilfssatzes 3 aus [1]. 24 haben wir:

ist in der (α) *Matrix* (10) $a_{1k} = -a_{k1}$, *dann wird aus* $a_{ik} = \pm a_{1l}$ *die Gleichheit* $a_{il} = \mp a_{1k}$ *folgen.*

Auf Grund der Multiplikationstafel [1]. 19 Formel (30) folgt aus $a_{1k} = -a_{k1}$ dass

$$E_k^2 = -1 \tag{14}$$

ist.

Daraus haben wir die Möglichkeit dem Hilfssatze 3 [1]. 24 die folgende Form anzugeben

Ist $E_k^2 = -1$, *so ist es identisch*

$$\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_k = 0.$$

Bezeichnen mit l_n wir die Zahl der hyperkomplexen Einheiten E_k die für $1 < k \leqslant 2^n$ (14) erfüllen, so kommen wir zum Schluss, dass die Anzahl der Gleichungen (13) bis auf $2^n - l_n - 1$ Gleichungen

$$\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_k = 0 \qquad (k \neq 1;\ E_k^2 = E_1) \tag{15}$$

reduziert wird.

Der erste Teil des Hilfsatzes 3—[1], 24—dem wir die Form

ist $E_k^2 = E_1$ *so ist im Allgemeinen* $\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_k \neq 0$

geben können, zeigt, dass die Gleichungen (15) unabhängig sind.

6. Auf Grund des Satzes [1].3 (die Elemente der ersten Zeile einer α-Matrix bestimmen dieselbe vollständig) folgt, dass eine α-Matrix 2^n willkürliche Elemente besitzt, also *eine orthogonale α-Matrix* wird darüber

$$(16) \qquad 2^n-(2^n-l_n-1)=l_n+1$$

willkürliche Elemente haben.

Wir beschäftigen uns jetzt mit der Bestimmung der Zahl (16). Dazu benützen wir die Matrix (30) aus [1][1]. Diese Matrix die unter und rechts der Geraden steht bezeichnen wir mit $\mathcal{E}$. Mit $\mathcal{E}^{(i)}$ und $\mathcal{E}^{(ik)}$ bezeichnen wir die Teilmatrizen den Formeln (4) und (5) aus [1] nach. Die Anzahl l_n der Einheiten E_k, die (14) genügen ist der Anzahl der Elemente der ersten Kolonne in (30) [1], die mit dem Vorzeichen — vorkommen, gleich.

In der ersten Kolonne der Matrix $\mathcal{E}^{(11)}$ kommen l_{n-2} solche Elemente vor. Daraus, dass $\mathcal{E}^{(21)}$ eine α-Matrix ist folgt, dass auch in der ersten Kolonne von $\mathcal{E}^{(21)}$ l_{n-2} Elemente mit negativem Vorzeichen sich befinden. Aus $\mathcal{E}^{(3)}=-\mathcal{E}^{(2)}$, also speziell $\mathcal{E}^{(31)}=-\mathcal{E}^{(21)}$ folgt, dass in $\mathcal{E}^{(31)}$

$$2^{n-2}-l_{n-2}$$

negative Elemente vorhanden sind. In der ersten Kolonne aus $\mathcal{E}^{(13)}$ gibt es augenscheinlich $l_{n-1}-l_{n-2}$ negative Elemente; daraus folgt, dass es in der letzten Kolonne von $\mathcal{E}^{(14)}$

$$2^{n-2}-(l_{n-1}-l_{n-2})$$

negative Elemente geben wird und deshalb auch soviel in der ersten Kolonne von $\mathcal{E}^{(23)}$. Aus $\mathcal{E}^{(3)}=-\mathcal{E}^{(2)}$, also speziel $\mathcal{E}^{(33)}=-\mathcal{E}^{(23)}$ folgt, dass in der ersten Kolonne von $\mathcal{E}^{(33)}$

$$2^{n-2}-(2^{n-2}-l_{n-1}+l_{n-2})=l_{n-1}-l_{n-2}$$

negative Elemente sich befinden.

Die Anzahl der negativen Elemente in der ersten Kolonne der Matrix $\mathcal{E}$ ist der Summe der Zahlen der negativen Elemente

---

[1]) In diesem Falle fassen wir den Namen Matrix im Sinne, welchen ihm W. Wilkosz in *Les matrices dans la théorie des espaces vectoriels.* Ann. Soc. Pol. Math. Vol. XV (1936) S. 75, gegeben hat.

in der ersten Kolonne der Matrizen $\mathscr{E}^{(1)}$, $\mathscr{E}^{(31)}$ und $\mathscr{E}^{(33)}$ gleich, also wir gelangen zu der rekursiven Gleichung

(17) $$l_n = l_{n-1} + (2^{n-2} - l_{n-2}) + (l_{n-1} - l_{n-2}).$$

Zu dieser Gleichung fügen wir die Gleichheiten

(18) $$l_1 = 1, \quad l_2 = 3$$

hinzu und bestimmen auf solcher Weise die Zahlen l_n.

7. Wir kommen jetzt auf die effektive Auswertung der Zahlen l_n. Aus der Formel

(17) $$l_n = 2^{n-2} + 2(l_{n-1} - l_{n-2})$$

haben wir

$$l_n - 2^{n-1} = 2^{n-2} - 2^{n-1} + 2(l_{n-1} - l_{n-2})$$

(19) $$l_n - 2^{n-1} = 2\{(l_{n-1} - 2^{n-2}) - (l_{n-2} - 2^{n-3})\}.$$

Wir bezeichnen mit

(20) $$k_n = l_n - 2^{n-1}$$

und dann folgt aus (19)

(21) $$k_n = 2(k_{n-1} - k_{n-2}).$$

Rekursiv beweist man dass k_n durch die Formel

(22) $$k_n = A\alpha^n + B\beta^n$$

dargestellt wird, wo α und β die Wurzeln der Gleichung

(23) $$z^2 = 2(z-1)$$

sind, A und B-Konstanten, die man so wählen braucht, dass

(24) $$k_1 = 0, \quad k_2 = +1$$

erfüllt sei[1]) (Die Gleichheiten (24) kommen aus (18) und (20) hervor). Aus (23) haben wir

(25) $$\alpha = 1 - i = \sqrt{2} \cdot e^{-\frac{\pi}{4} i}, \quad \beta = 1 + i = \sqrt{2}\, e^{\frac{\pi}{4} i}.$$

Aus (24) und (22) folgt

$$0 = A\alpha + B\beta,$$
$$1 = A\alpha^2 + B\beta^2.$$

---

[1]) Ähnlich verfahrt man bei der Fibbonacci Folge. Man vergleiche auch bei Lucas. Amer. Journ. of Math. Vol. I (1878). S. 184—240.

Daraus

(26) $$A=-\frac{1}{\alpha(\beta-\alpha)},\quad B=\frac{1}{\beta(\beta-\alpha)}.$$

Aus (26) und (25) folgt

(27) $$A=-\frac{\sqrt{2}}{4i}e^{\frac{\pi}{4}i},\quad B=\frac{\sqrt{2}}{4i}e^{-\frac{\pi}{4}i}.$$

Setzen wir (27) und (25) in (22), so erhalten wir

$$k_n=\frac{(\sqrt{2})^{n+1}}{2}\left\{\frac{-e^{-\frac{\pi}{4}(n-1)i}+e^{\frac{\pi}{4}(n-1)i}}{2i}\right\},$$

(28) $$k_n=\frac{(\sqrt{2})^{n+1}}{2}\sin(n-1)\frac{\pi}{4}.$$

Endlich aus (28) und (20) folgt

(29) $$l_n=2^{n-1}+\frac{(\sqrt{2})^{n+1}}{2}\sin(n-1)\frac{\pi}{4}.$$

Aus (16) und (29) folgt:

Eine orthogonale α-Matrix vom Grade 2^n besitzt

(30) $$l_n+1=2^{n-1}+(\sqrt{2})^{n-1}\sin(n-1)\frac{\pi}{4}+1$$

willkürliche Elemente.

8. ***Die orthogonalen α-Matrizen bilden eine Gruppe in Bezug zur Multiplikation.***

In der Tat bilden die α-Matrizen, wie auch die orthogonalen Matrizen Gruppen in Bezug auf die Multiplikation, also bilden auch die orthogonalen α-Matrizen eine Gruppe..

9. Normieren wir eine orthogonale Matrix, so erhalten wir eine unitäre Matrix. Nach (30) kommen wir zum Schluss, dass ***die unitären α-Matrizen***

$$A=\|a_{ik}\| \qquad (i, k=1, 2, \ldots, 2^n)$$

vom Grade 2^n, l_n willkürliche Elemente besitzen.

(29) $$l_n=2^{n-1}+(\sqrt{2})^{n-1}\sin(n-1)\frac{\pi}{4}$$

Die Forderung A sei eine unitäre α-Matrix ist dem System der Gleichungen

(31) $$|a_1|=1 \quad a_1\times a_k=0 \qquad (k\neq 1;\ E_k^2=1)$$

äquivalent.

§ 2. Konjugierte Clifford-Zahlen. Lipschitz-Zahlen. Reguläre komplexe Ausdrücke n-ter Ordnung.

10. Es sei eine Clifford Zahl

$$\Phi=\varphi_0+\varphi_1 e_1+\ldots+\varphi_n e_n+\varphi_{1,2} e_1 e_2+\ldots+\varphi_{n-1,n} e_{n-1} e_n+ \\ +\varphi_{1,2,3} e_1 e_2 e_3+\ldots+\varphi_{1,2,3,4} e_1 e_2 e_3 e_4+\ldots+\varphi_{1,2,\ldots,n} e_1 e_2\ldots e_n \tag{32}$$

gegeben ($\varphi_{r_1 r_2 \ldots r_m}$ reell). Multipliziert man jedes Glied $\varphi_{r_1 r_2 \ldots r_m} e_{r_1} e_{r_2} \ldots e_{r_m}$ mit $(-1)^{\frac{m(m+1)}{2}}$, so erhaltet man die zu Φ *konjugierte* Zahl[1])

$$\bar{\Phi}=\varphi_0-\varphi_1 e_1-\ldots-\varphi_n e_n-\varphi_{1,2} e_1 e_2-\ldots-\varphi_{n-1,n} e_{n-1} e_n+ \\ +\varphi_{1,2,3} e_1 e_2 e_3+\ldots+\varphi_{1,2,3,4} e_1 e_2 e_3 e_4+\ldots+(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \varphi_{1,2,\ldots,n} e_1 e_2 \ldots e_n. \tag{33}$$

Es sei

$$A=\|a_1, a_2, \ldots, a_{2^n}\| \tag{34}$$

die mit Φ isomorphe α-Matrix. Wir untersuchen die Matrix, die mit $\bar{\Phi}$ isomorph ist. Dazu bemerken wir, dass

$$(e_{r_1} e_{r_2} \ldots e_{r_m})^2=(-1)^{\frac{m(m+1)}{2}} \tag{35}$$

ist. In der Tat:

$$\begin{aligned}(e_{r_1} e_{r_2} \ldots e_{r_m})^2 &=(e_{r_1} e_{r_2} \ldots e_{r_m})(e_{r_1} e_{r_2} \ldots e_{r_m})=(-1)(e_{r_1} \ldots e_{r_{m-1}})(e_{r_1} e_{r_m})(e_{r_2} \ldots e_{r_m})= \\ &=(-1)^2(e_{r_1} \ldots e_{r_{m-2}})(e_{r_1} e_{r_{m-1}} e_{r_m})(e_{r_2} \ldots e_{r_m})= \\ &=\ldots=(-1)^{m-1}(e_{r_1} e_{r_1})(e_{r_2} \ldots e_{r_m})(e_{r_2} \ldots e_{r_m})= \\ &=(-1)^{m-1}(e_{r_1} e_{r_1})(-1)^{m-2}(e_{r_2} e_{r_2})(e_{r_3} \ldots e_{r_m})(e_{r_3} \ldots e_{r_m})=\ldots= \\ &=(-1)^{m-1}(e_{r_1} e_{r_1})(-1)^{m-2}(e_{r_2} e_{r_2})(-1)^{m-3}(e_{r_3} e_{r_3})\ldots(-1)^0(e_{r_m} e_{r_m}) \\ &=(-1)^{(m-1)+(m-2)+\ldots+1} e_{r_1}^2 e_{r_2}^2 \ldots e_{r_m}^2= \\ &=(-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} \cdot (-1)^m=(-1)^{\frac{m(m+1)}{2}}\end{aligned}$$

Nehmen wir die Multiplikationstafel (30) [1] in Acht, so kommen wir zum Schluss, dass der k-te Element der ersten Kolonne in (34) $+a_k$ bzw. $-a_k$ gleich ist, nachdem $E_k^2=+1$ bzw. $E_k^2=-1$. Aus dieser Bemerkung und der Definition der mit (32) konjugierten Zahl folgt, dass die mit (33) isomorphe α-Matrix

$$\bar{A}=A^* \tag{36}$$

ist.

---

[1]) Enzykl. d. math. Wiss. III_1, S. 1411.

11. Lipschitz hat diejenigen Zahlen (32) untersucht, deren Glieder nur eine *Gerade* Anzahl von Primitivzeichen e_i enthalten, also die Zahlen

$$(37)\quad \Lambda=\lambda_0+\lambda_{1,2}e_1e_2+\ldots+\lambda_{n-1,n}e_{n-1}e_n+\lambda_{1,2,3,4}e_1e_2e_3e_4+ \\ +\ldots+\lambda_{1,2,3,4,5,6}e_1e_2e_3e_4e_5e_6+\ldots$$

Diese bilden ein hyperkomplexes Zahlensystem Σ_n^*, das mit Σ_{n-1} isomorph ist, wo Σ_n das hyperkomplexe System der Clifordzahlen mit n Primitiveinheiten bezeichnet[1]). Wie wird die mit Λ isomorphe α-Matrix aussehen?

Die Einheitsmatrix E_{2p+1} (bzw. E_{2p}) ist dem Produkt einer geraden (bzw. ungeraden) Zahl von Primitiveinheitsmatrizen E_{2^j} gleich (p, j—ganzzahlig),

Man führt einen Rekursivbeweis, indem man die Tafel (31) aus [1] benützt.

Auf Grund dieses Satzes erhält man die Matrizen

$$(37')\quad L=\|b_1, 0, b_3, 0, \ldots, b_{2^n-1}, 0\|$$

die mit den Lipschitzzahlen isomorph sind.

Man sieht leicht ein, dass Summe und Produkt der Matrizen (37') wieder eine Matrix der Form (37') sind.

Der Satz, dass Σ_n^* und Σ_{n-1} isomorph sind wird bewiesen durch Feststellung eines Isomorphismus zwischen der Matrix (37') und der Matrix

$$l=\|b_1, b_3, \ldots, b_{2^n-1}\|.$$

Wir verzichten auf den leichten Beweis, dass aus

$$\|b_1^{(1)},0,b_3^{(1)},0,\ldots,b_{2^n-1}^{(1)},0\|+\|b_1^{(2)},0,b_3^{(2)},0,\ldots,b_{2^n-1}^{(2)},0\|=\|c_1,0,c_3,0,\ldots,c_{2^n-1},0$$

und

$$\|b_1^{(1)},0,b_3^{(1)},0,\ldots,b_{2^n-1}^{(1)},0\|\cdot\|b_1^{(2)},0,b_3^{(2)},0,\ldots,b_{2^n-1}^{(2)},0\|=\|d_1,0,d_3,0,\ldots,d_{2^n-1},0\|$$

die Gleichheiten

$$\|b_1^{(1)}, b_3^{(1)}, \ldots, b_{2^n-1}^{(1)}\|+\|b_1^{(2)}, b_3^{(2)}, \ldots, b_{2^n-1}^{(2)}\|=\|c_1, c_3, \ldots, c_{2^n-1}\|$$

und

$$\|b_1^{(1)}, b_3^{(1)}, \ldots, b_{2^n-1}^{(1)}\|\cdot\|b_1^{(2)}, b_3^{(2)}, \ldots, b_{2^n-1}^{(2)}\|=\|d_1, d_3, \ldots, d_{2^n-1}\|$$

folgen.

---

[1]) Enz. d. Math. Wiss. III—1, S. 1411—1412.

Der Beweis beruht auf der Bemerkung, dass wenn man in einer α-Matrix die geraden Zeilen und Kolonnen ausstreicht, so erhält man wieder eine α-Matrix.

12. Sind in (37) nur die $\frac{n(n-1)}{2}+1$ Koeffizienten

$$\lambda_0 \neq 0, \quad \lambda_{1,2}, \lambda_{1,3}, \ldots, \lambda_{n-1,n} \tag{38}$$

willkürlich und definiert man die übrigen Koeffizienten durch die Formeln

$$\begin{gathered} \lambda_0 \cdot \lambda_{r_1 r_2 r_3 r_4} = \lambda_{r_1 r_2} \lambda_{r_3 r_4} + \lambda_{r_1 r_3} \lambda_{r_4 r_2} + \lambda_{r_1 r_4} \lambda_{r_2 r_3} \\ \lambda_0 \cdot \lambda_{r_1 r_2 r_3 r_4 r_5 r_6} = \lambda_{r_1 r_2} \lambda_{r_3 r_4 r_5 r_6} + \lambda_{r_1 r_3} \lambda_{r_4 r_5 r_6 r_2} + \lambda_{r_1 r_4} \lambda_{r_5 r_6 r_2 r_3} + \lambda_{r_1 r_5} \lambda_{r_6 r_2 r_3 r_4} + \lambda_{r_1 r_6} \lambda_{r_2 r_3 r_4 r_5} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{gathered} \tag{39}$$

so heisst Λ ***ein regulärer komplexer Ausdruck n-ter Ordnung***[1].

Ist Λ reglär, so ist der Produkt

$$\Lambda \bar{\Lambda} = \lambda_0^2 + \lambda_{1,2}^2 + \ldots + \lambda_{n-1,n}^2 + \lambda_{1,2,3,4}^2 + \ldots \tag{40}$$

eine reelle nicht negative Zahl

$$\Lambda \bar{\Lambda} = N(\Lambda); \tag{41}$$

$N(\Lambda)$ heisst die Norm von Λ.

Wir werden jetzt den Zusammenhang zwischen den regulären komplexen Ausdrücken und den orthogonalen α-Matrizen untersuchen.

Aus (6), (11) und (36) folgt, dass die orthogonalen α-Matrizen eine Gleichheit, die der Gleichheit (40) analog ist genügen, nämlich

$$AA^* = A\bar{A} = N(a_1) \cdot E_1 = (a_{11}^2 + a_{12}^2 + \ldots + a_{12^n}^2) E_1 \tag{42}$$

Wegen $\Sigma_{n+1}^* = \Sigma_n$ werden wir den Zusammenhang unter den regulären komplexen Ausdrücken $(n+1)$-ter Ordnung und den orthogonalen α-Matrizen vom Grade 2^n suchen.

Sind vielleicht die regulären Ausdrücke $(n+1)$-ter Ordnung den orthogonalen α-Matrizen vom Grade 2^n isomorph? Nur für kleine n wird diese Frage bejaht.

Wegen (41) und (36) ***sind die mit den regulären Ausdrücken isomorphen a-Matrizen orthogonal.***

---

[1]) Enzykl. der math. Wiss. III—1. S. 1413.

Aus dieser Bemerkung folgt insbesondere:

a) *Die Anzahl der willkürlichen Elemente der orthogonalen α-Matrizen vom Grade 2^n ist nicht kleiner als die Zahl der willkürlichen Elemente der regulären komplexen Ausdrücke $(n+1)$-ter Ordnung.*

b) *Ist die Anzahl der willkürlichen Elemente der orthogonalen α-Matrizen vom Grade 2^n der Zahl der willkürlichen Elemente der regulären Ausdrücke $(n+1)$-ter Ordnung gleich, so sind diese α-Matrizen den entsprechenden regulären Ausdrücken isomorph.*

Wir schreiben eine Tafel für die Zahl der willkürlichen Elemente der orthogonalen α-Matrizen vom Grade 2^n

(43)

n	1	2	3	4	5	6	7	...
$l_n+1=2^{n-1}-(\sqrt{2})^{n-1}\sin(n-1)\frac{\pi}{4}+1$	2	4	7	11	17	29	57	...

Eine ähnliche Tafel schreiben wir für die Anzahl der willkürlichen Elemente der regulären komplexen Ausdrücke $(n+1)$-ter Ordnung

(44)

n	1	2	3	4	5	6	7	...
$\frac{n(n+1)}{2}+1$	2	4	7	11	16	22	29	...

Aus (43) und (44) folgt

$$l_n=\frac{n(n+1)}{2} \quad \text{für} \quad n=1,2,3,4. \tag{45}$$

Man beweist leicht, dass

$$l_n>\frac{n(n+1)}{2} \quad \text{für} \quad n\geqq 5. \tag{45'}$$

Aus (45) und b) folgt, dass *nur die orthogonalen α-Matrizen vom Grade 2, 4, 8, 16 mit den regulären Ausdrücken 2-, 3-, 4-, und 5-ter Ordnung isomorph sind.* Für grössere n ist die Klasse der entsprechenden orthogonalen α-Matrizen viel breiter.

13. Die Systeme Σ_n^* hat Lipschitz verwendet um die orthogonalen Transformationen von n-Veränderlichen

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \tag{46}$$

darzustellen.

Nämlich nennen wir *einen Vektor* den Ausdruck

(47) $$\vec{x}=x_1e_1+\ldots+x_ne_n,$$

so wird auch der Ausdruck

(48) $$\vec{y}=\Lambda\vec{x}\Lambda^{-1}$$

ein Vektor

(49) $$\vec{y}=y_1e_1+\ldots+y_ne_n$$

und

(50) $$\vec{y}\times\vec{y}=y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2=(\Lambda\vec{x}\Lambda^{-1})\overline{(\Lambda\vec{x}\Lambda^{-1})}=x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2.$$

Die Gleichung (50) kann geometrisch als die Gruppe der Drehungen eines n-dimensionalen Euklidischen Raumes um dessen Ursprung gedeutet werden[1]).

Wenden wir diese Resultate nebst den Resultaten aus 12 an, so kommen wir zum Schluss:

Ist

(51) $$L=\|l_1, 0, l_3, 0, \ldots, l_{2^n-1}, 0\|$$

eine orthogonale α-Matrix vom Grade $\leqq 2^5$ und ist

(52) $$X=\|0, x_{2^1}, 0, x_{2^2}, 0, \ldots, 0, x_{2^n}\|,$$

so ist

(53) $$Y=LXL^{-1}=L_NXL_N^*=\|0, y_{2^1}, 0, y_{2^2}, 0, \ldots, 0, y_{2^n}\|$$

auch eine Matrix der Form (52) und

(54) $$YY^*-Y\overline{Y}=y_{2^1}^2+y_{2^2}^2+\ldots+y_{2^n}^2=XX^*=X\overline{X}=x_{2^1}^2+x_{2^2}^2+\ldots+x_{2^n}^2$$

also ***die orthogonalen mit dem Lipschitzzahlen isomorphen α-Matrizen vom Grade $2^n \leqslant 2^5$ stellen durch die Gleichung*** (53) ***die Drehungen eines n-dimensionalen Euklidischen Raumes um dessen Ursprung dar.***

L_N bedeutet in (53) die normierte (also unitäre) Matrix L (nach (8)). Die Gleichung

(55) $$Y_1=LXL^*$$

stellt die sogenanten *Drehstreckungen* im n-dimensionalen Euklidischen Raume dar ($n=1, 2, 3, 4, 5$).

---

[1]) Enz. d. Math. Wiss. III—1. S. 1414—1415.

§ 3. Isomorphismus im System der Clifford Zahlen

14. Wir stellen jetzt die Frage: Wieviel reelle 2^n-ären α-Matrizenformeln gibt es für die Clifford Zahlen mit n Primitiveinheiten?

Wir werden zeigen, dass es 2^{n-1} solche Formeln gibt. Es werde rekursiv bewiesen.

Durch unmittelbare Ausrechnung stellt man fest, dass die zwei Matrizen

$$(56)\quad Q_1=\left\|\begin{matrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{matrix}\right\| \qquad Q_2=\left\|\begin{matrix} a & -b & c & d \\ b & a & d & -c \\ -c & -d & a & -b \\ -d & c & b & a \end{matrix}\right\|$$

als Matrizenformeln für die Quaternion (also für die Cliffordzahl vom Grade $2^2=4$)

$$(57)\qquad q=a+bi+cj+dk$$

gelten dürfen. (Man stellt nämlich fest, dass für zwei Quaternionen die Summe und der Produkt der entsprechenden Matrizen der Summe und dem Produkt der Quaternionen zugeordnet sind).

Es sei eine Zahl Φ_n (32) und für sie eine α-Matrizenformel (34)

$$(34)\qquad A=\|a_1, a_2, \ldots, a_{2^n}\|$$

gegeben. Wir betrachten eine Zahl Φ_{n+1}. Die mit dieser Zahl isomorphe α-Matrix sei

$$(58)\qquad \begin{aligned} F&=\|f_1, f_2, \ldots, f_{2^{n+1}}\|= \\ &=f_1E_1+f_2E_2+\ldots+f_{2^n}E_{2^n}+f_{2^n+1}E_{2^n+1}+\ldots+f_{2^{n+1}}E_{2^{n+1}} \end{aligned}$$

(nach 31 aus [1] gibt es mindestens eine solche Formel).

Wir bilden der Regel (34) nach die zwei α-Matrizenformeln

$$(59)\qquad \|\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{2^n}\| \quad \text{bzw.} \quad \|\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{2^n}\|$$

für die Zahlen

$$(60)\quad f_1E_1+f_2E_2+\ldots+f_{2^n}E_{2^n} \text{ bzw. } f_{2^n+1}E_1+f_{2^n+2}E_2+\ldots+f_{2^{n+1}}E_{2^n}.$$

Aus den zwei α-Matrizen (59) bilden wir zwei α-Matrizen

$$(61)\qquad \begin{aligned} M&=\|\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{2^n}, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{2^n}\| \\ \text{und}\quad N&=\|\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{2^n}, -\psi_1, -\psi_2, \ldots, -\psi_{2^n}\| \end{aligned}$$

und zeigen, dass diese zwei Matrizen als Matrizenformeln für die Zahl Φ_{n+1} gelten dürfen. Wir zeigen nämlich, dass die Matrizen M und N isomorph sind. In der Tat: Es sei

$$M_1=\|\varphi_1^{(1)}, \varphi_2^{(1)}, \dots, \varphi_{2^n}^{(1)}, \psi_1^{(1)}, \dots, \psi_{2^n}^{(1)}\|$$
$$M_2=\|\varphi_1^{(2)}, \varphi_2^{(2)}, \dots, \varphi_{2^n}^{(2)}, \psi_1^{(2)}, \psi_2^{(2)}, \dots, \psi_{2^n}^{(2)}\|$$
$$N_1=\|\varphi_1^{(1)}, \varphi_2^{(1)}, \dots, \varphi_{2^n}^{(1)}, -\psi_1^{(1)}, \dots, -\psi_{2^n}^{(1)}\|$$
$$N_2=\|\varphi_1^{(2)}, \varphi_2^{(2)}, \dots, \varphi_{2^n}^{(2)}, -\psi_1^{(2)}, -\psi_2^{(2)}, \dots, -\psi_{2^n}^{(2)}\|$$

Augenscheinlich ist M_1+M_2 der Matrix N_1+N_2 isomorph. Aus den Formeln [1])

$$M_1M_2=\left\|\begin{matrix} M_1^{(1)}, M_1^{(2)} \\ -M_1^{(2)}, M_1^{(1)}\end{matrix}\right\| \cdot \left\|\begin{matrix} M_2^{(1)}, M_2^{(2)} \\ -M_2^{(2)}, M_2^{(1)}\end{matrix}\right\| =$$
$$=\left\|\begin{matrix} M_1^{(1)}M_2^{(1)}-M_1^{(2)}M_2^{(2)}, & M_1^{(1)}M_2^{(2)}+M_1^{(2)}M_2^{(1)} \\ -M_1^{(2)}M_2^{(1)}-M_1^{(1)}M_2^{(2)}, & -M_1^{(2)}M_2^{(2)}+M_1^{(1)}M_2^{(1)}\end{matrix}\right\|$$

$$N_1N_2=\left\|\begin{matrix} N_1^{(1)}, N_1^{(2)} \\ -N_1^{(2)}, N_1^{(1)}\end{matrix}\right\| \cdot \left\|\begin{matrix} N_2^{(1)}, N_2^{(2)} \\ -N_2^{(2)}, N_2^{(1)}\end{matrix}\right\| =$$
$$=\left\|\begin{matrix} N_1^{(1)}N_2^{(1)}-N_1^{(2)}N_2^{(2)}, & N_1^{(1)}N_2^{(2)}+N_1^{(2)}N_2^{(1)} \\ -N_1^{(2)}N_2^{(1)}-N_1^{(1)}N_2^{(2)}, & -N_1^{(2)}N_2^{(2)}+N_1^{(1)}N_2^{(1)}\end{matrix}\right\|$$

$$N_j^{(1)}=M_j^{(1)}, \quad N_j^{(2)}=-M_j^{(2)} \qquad (j=1,2)$$

wo $N_j^{(i)}$ und $M_j^{(i)}$ $(i, j=1,2)$ die Teilmatrizen von N und M sind [2]) folgt:

Ist

(62) $$M_1M_2=\|\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{2^n}, \mu_{2^n+1}, \dots, \mu_{2^{n+1}}\|$$

so ist

(63) $$N_1N_2=\|\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{2^n}, -\mu_{2^n+1}, \dots, -\mu_{2^{n+1}}\|.$$

Aus den Formeln (62) und (63) folgt, dass M_1M_2 der Matrix N_1N_2 isomorph ist. Wir gelangen also zum Satz:

Für die Clifford Zahlen mit $(n+1)$ Primitiveinheiten gibt es zweifach soviel α-Matrizenformeln, wie für die Cliffordzahlen mit n Primitiveinheiten.

Für die Cliffordzahlen mit 2 Primitiveinheiten (Quaternionen) haben wir bewiesen, dass es $2^{2-1}=2$ α-Matrizenformeln (56) gibt. Nehmen wir an, dass es für die Cliffordzahlen mit n Primitiveinheiten 2^{n-1} α-Matrizenformeln gibt, so erhalten wir

---

[1]) Mac Duff: *Theorie of the Matrices.* Berlin 1933. S. 3—4.

[2]) Vergleiche [1]. (4).

für die Cliffordzahlen mit $(n+1)$ Primitiveinheiten $2\cdot 2^{n-1}=2^n$ α-Matrizenformeln. Somit ist unser Hauptsatz, dem Prinzip der vollständigen Induktion nach, bewiesen.

15. Wir führen folgende Überlegung:

Es sei eine Clifford Zahl

$$\Phi=\varphi_0+\varphi_1 e_1+\ldots+\varphi_n e_n+\varphi_{1,2}e_1e_2+\ldots+\varphi_{1,2,3}e_1e_2e_3+ +\ldots+\varphi_{1,2,3,\ldots,n}e_1e_2e_3\ldots e_n \tag{32}$$

gegeben. Wir bilden für diese Zahl die 2^{n-1} α-Matrizenformeln

$$F_1, F_2 \ldots, F_{2^{n-1}} \tag{64}$$

(F_i sind reelle α-Matrizen vom Grade 2^n). Es sei eine feste α-Matrizenformel gewählt. Dieser Formel nach stellen die Matrizen (64) verschiedene Clifford-Zahlen dar. Es seien die Zahlen

$$\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{2^{n-1}}. \tag{65}$$

Auf solcher Weise erhalten wir 2^{n-1} verschiedene Isomorphe Abbildungen des Systems der Cliffordzahlen mit n Primitiveinheiten auf sich selbst.

Remarque sur la notion de la définition conditionnelle de Peano

par

Witold Wilkosz (Cracovie)

Parmi les types de définitions considérées par G. Peano dans son opuscule si fréquemment cité et remontant encore à 1894 »*Notations de Logique Mathématique. Introduction au Formulaire de Mathématique* (Turin)« se trouve expliquée la notion de la définition »*conditionnelle*« en ces termes:

— Quelque fois ce qu'on définit n'est pas un signe simple, mais bien un groupe de signes, entre lesquels il y a des signes nouveaux, ou un groupe de signes qui ont séparément une signification, mais tels que leur ensemble n'a pas encore de signification. Alors la définition suit une hypothèse, h, et a la forme:

$$h \cdot \supset \cdot x \overset{\mathrm{df}}{=} a$$

»dans l'hypothèse h, nous écrivons le groupe nouveau x au lieu du groupe a«. P. ex.

$$a, b \in N \cdot \supset \cdot \mathrm{quot}\,(a, b) \overset{\mathrm{df}}{=} \max [N_0 \cap \overline{x \ni} (xb \leqq a)].$$

»Si a et b sont des nombres entiers positifs, par *quot* (a, b) nous entendons le plus grand des nombres positifs, le 0 compris, tels que leur produit par b ne surpasse pas a«. —

Expliquons un peu et traduisons ces mots si clairs d'ailleurs, mais à l'époque où ils étaient écrits, dans une langue plus moderne de la logique d'aujourd'hui. On veut définir une notion $A(x, y, \ldots)$ dépendant des variables $x, y, \ldots$ par une expression connue $M(x, y, \ldots)$.

Cette expression peut avoir un sens dans un champ de ses variables $x, y, \ldots$ que l'on veut *restreindre* pour ne définir $A(x, y, \ldots)$

que dans un champ plus étroit. Or, Peano procède ici de la manière suivante. En faisant précéder la définition purement nominale

$$A(x, y, ...) \overset{df}{=} M(x, y, ...)$$

par une condition (ou hypothèse) $h(x, y, ...)$, il obtient ainsi une définition que nous appellons *conditionnelle*

$$h(x, y, ...) \cdot \supset \cdot A(x, y, ...) \overset{df}{=} M(x, y, ...).$$

Nous retrouvons cette forme de définition dans les travaux de l'*École Italienne*. Nous la voyons p. ex. dans le livre bien connu de M. Burali-Forti, *Logica Matematica* (IIe éd. Hoepli, Milan 1919, p. 29) parmi les définitions nominales. Par contre, les logiciens succédants à Peano, autres que ses élèves et collaborateurs de l'École Italienne, ont rejeté complètement cette forme et ne conservent que la définition *purement nominale* dépourvue d'aucune hypothèse ou condition. Et c'est bien juste en principe! C'est Peano qui nous déclare qu'une définition représente pour lui simplement une abréviation symbolique, donc à vrai dire, pas une *proposition* entrant dans les cadres du système. Que serait donc une expression comme:

$$h \cdot \supset \cdot x \overset{df}{=} a?$$

À droite nous avons une *définition*, à gauche une *proposition*. La définition conditionnelle veut ici exprimer une liaison entre deux choses, dont une seulement est une proposition du système logique considéré et l'autre n'est qu'une abréviation d'écriture!

D'autre part il n'est pas à nier que cette forme de définition conditionnelle est, implicitement d'ailleurs, d'un usage courant chez les mathématiciens et qu'elle présente beaucoup d'avantages. Ne pourrait-on pas retenir cette forme d'une telle commodité et utilité dans la pratique en lui rétablissant par quelque artifice la validité logique? Cette question m'est venue de nouveau à l'esprit à cause de la lecture du beau livre de MM. H. Scholtz et H. Schweitzer »*Die sogenannten Definitionen durch Abstraktion*« (Leipzig 1935). J'y ai trouvé—dans un autre contexte d'ailleurs et pour le but d'un cas spécial, un procédé dont je me sers depuis beaucoup de temps[1]) dans toute sa généralité.

---

[1]) Mais je n'ai d'ailleurs rien publié sur cette question!

Ce procédé fournit une méthode générale permettant de traduire chaque définition conditionnelle de Peano par une définition purement nominale. Voici ce procédé.

Distinguons d'abord deux cas.

Ou bien dans une définition conditionnelle de la forme:

(1) $$h(x, y, \ldots) \cdot \supset \cdot A(x, y, \ldots) \overset{\mathrm{df}}{=} M(x, y, \ldots)$$

l'expression $M(x, y, \ldots)$ est une proposition variable, ou elle représente un autre objet logique. Dans le premier cas, nous posons simplement:

(2) $$A(x, y, \ldots) \overset{\mathrm{df}}{=} h(x, y, \ldots) \cdot M(x, y, \ldots)$$

et le problème se trouve déjà résolu. C'est le second cas qui présente plus d'intérêt. Dans ce cas, nous définissons:

(3) $$A(x, y, \ldots) \cdot \overset{\mathrm{df}}{=} \cdot (\imath z)(h(x, y, \ldots) \cdot z = M(x, y, \ldots)).$$

Nous avons ici une *définition strictement nominale qui nous remplace entièrement* (on le voit immédiatement) la définition conditionnelle (1). C'est précisément de cette manière que MM. Scholtz et Schweitzer ont défini leur »abstraits«.

Lorsque l'hypothèse $h(x, y, \ldots)$ garantit déjà le sens de l'expression $M(x, y, \ldots)$ (ce qui est toujours le cas de Peano), on tire de (1) la proposition vraie:

(4) $$h(x, y, \ldots) \cdot \underset{x, y, \ldots}{\supset} \cdot A(x, y, \ldots) = M(x, y, \ldots).$$

Or, c'est la même proposition qu'on peut tirer dans ce cas de (3). Ce n'est que par (4) que l'expression $A(x, y, \ldots)$ entre dans les théorèmes. On voit donc que l'on peut sans crainte retenir la forme de la définition conditionnelle (1) en entendant toujours par elle la définition (2) ou (3) qui est déjà d'une légitimité incontestable.

Comptes-rendus et analyses

ELIE CARTAN, Membre de l'Institut. *La théorie des groupes finis et continus et la géométrie différentielle traitée par la méthode du repère mobile.* Leçons professées à la Sorbonne et rédigées par M. JEAN LERAY (Cahiers scientifiques publiés sous la direction de M. GASTON JULIA, fascicule XVIII). Paris, GAUTHIER-VILLARS, éditeur (269+VI).

L'importance fondamentale de la théorie des groupes est actuellement universellement reconnue par tous ceux qui cultivent ou appliquent la mathématique. L'intérêt de la méthode du repère mobile est moins bien connu, mais elle est très féconde et se trouve étroitement liée à la théorie des groupes. D'autre part la compétence exceptionnelle de M. E. CARTAN en ce qui concerne les théories susdites, lesquelles lui doivent tant de contributions fondamentales, est bien connue.

Nous ne pouvons donc que recommander chaudement l'étude du livre qui nous occupe à tous ceux qui s'intéressent aux sciences mathématiques.

ALFRED ERRERA, Professeur à l'Université libre de Bruxelles. *Les éléments de la théorie des fonctions d'une variable complexe.* Imprimerie lithographie AUG. PHOLIEN, Liège.

Cet ouvrage est très remarquable par le souci de précision et de rigueur avec lequel il est rédigé, ainsi que le soin avec lequel l'auteur a utilisé jusqu'aux travaux les plus récents relatifs à son sujet. On doit donc regretter que cet ouvrage, au lieu d'être litographié, ne soit pas imprimé, ce qui en aurait rendu l'étude bien plus aisée.

JULIEN MALENGREAUX. *Essai sur les fondements de la géométrie euclidienne.* Librairie PAYOT & Cie, Lausanne (I+311).

Cet ouvrage est assez difficile à comprendre car, d'une part, l'auteur traite son sujet d'une façon très originale et, d'autre part, il ne donne pas d'indications générales sur la méthode qu'il adopte.

On pourra peut-être mieux se rendre compte des idées de l'Auteur lorsque le traité de géométrie qu'il prépare aura paru.

S. Zaremba

Joseph Miller Thomas. *Differential Systems*. American Math. Soc. Colloquium Publications, v. XXI, New-York 1937.

Le développement de la Géométrie Différentielle moderne a donné en même temps un nouvel essor à quelques autres branches des mathématiques, un peu oubliées dépuis la seconde moitié du XIX[e] siècle. Ces sont en particulier la théorie des systèmes d'équations différentielles aux dérivées partielles et la théorie de Pfaff. Le livre de M. Thomas est consacré à l'étude des relations entre ces deux théories ainsi qu'à leurs fondements. On dispose maintenant pour traiter ces questions si difficiles de trois outils dont chacun est très bien développé. Ces sont: la théorie de certains anneaux non-commutatifs de polynômes, étudiée d'abord par H. Grassmann et considérablement perfectionnée par H. Cartan, le calcul tensoriel et enfin l'Algèbre Moderne si bien traitée dans le livre de M. L. van der Waerden. C'est spécialement l'aspect algébrique du problème qui intéresse M. Thomas. On le voit en lisant les titres des huit premiers chapitres (sur onze en tout) de son livre: Introduction, Generalities on Symbols und Systems, Grassmann Algebra, Differential Rings, Commutative Monomials and Polynomials, Algebraic Systems, Algebraic Differential Systems, Function Systems and Differential Systems.

Un chapitre seulement constitue une liaison entre les théories algébrique et classique. Le livre de M. Thomas nous donne aussi la clef de ce grand Traité, si important et en même temps si difficile à lire qu'est le traité connu de Riquier. Grâce à M. Thomas, nous sommes actuellement en possesion d'un livre où le problème de la vraie nature des systèmes de Pfaff se trouve bien posé et profondément étudié.

Hoene-Wroński. *Wstęp do Filozofii Matematyki* [Introduction à la Philosophie des Mathématiques — traduction polonaise, 1937].

L'oeuvre mathématique de Hoene-Wroński est jusqu'à nos jours un sujet de controverses qui, éteintes pour quelque temps, se raniment de nouveau sans arriver à une conclusion tranchante, au moins aux yeux des non-mathématiciens qui s'en occupent et qui constituent la majorité parmi les partisants de Hoene-Wroński. *Wstęp do Filozofii Matematyki* est une traduction de l'*Intro-*

duction à la Philosophie des Mathématiques parue en français en 1811, qui constitue le contenu du Ier volume de l'édition française des oeuvres mathématiques de Hoene-Wroński (J. Hermann, Paris, 4 vol.).

Sans préjuger de la réalisation des hautes ambitions des partisants de la pensée de Hoene-Wronski, qui voient dans cet ouvrage la base de tout l'édifice des Mathématiques, on ne peut pas s'abstenir d'admirer les soins avec lesquels ce livre est présenté dans sa récente traduction au public polonais. W. Wilkosz

---

III Congrès Polonais de Mathématiques

WARSZAWA 1937

I. Organisation du Congrès. A la suite de la résolution votée par le II Congrès Polonais de Mathématique à Wilno en 1931, la Société Polonaise de Mathématique a été chargée de préparer le III Congrès pour 1935 et de le convoquer dans la ville qu'elle aura désignée. Cependant, la réorganisation de la Société a retardé ce délai de 2 ans. La première assemblée de la Société réorganisée, tenue à Varsovie le 7 mars 1937, a décidé de convoquer le III Congrès à Varsovie en automne 1937 et de l'accompagner du jubilé du Professeur Dickstein à l'occasion de la 65-ième année de son activité scientifique.

Le *Comité d'Organisation* du Congrès, composé de personnes invitées par la Société, s'est constitué comme il suit:

Président du Comité: W. Sierpiński,

Vice-présidents: C. Kuratowski, S. Mazurkiewicz et S. Straszewicz,

Secrétaire général: K. Zarankiewicz,

Vice-secrétaires: K. Borsuk et E. Szpilrajn,

Membres du Comité: M. Huber, B. Knaster et J. Łukasiewicz.

Les fonds nécessaires ont été accordés au Comité par le Ministère de l'Instruction Publique et des Cultes. La durée du Congrès a été fixée par le Comité à la date du 28 septembre jusqu'au 3 octobre et celle du Jubilé du Professeur Dickstein au 3 octobre 1937. En juin, les invitations contenant des renseignements sur le *Programme provisoire*, les conditions d'admission des participants, leur séjour à Varsovie etc., et munies de formulaires à remplir (*Bulletin d'Adhésion* et *Bulletin de Communication*) ont été adressées aux Membres de la Société Polonaise de Mathématique et à tous les mathématiciens polonais ou étrangers qui

ont collaboré aux publications mathématiques polonaises ou pris part aux congrès précédents.

La cotisation de participation a été fixée à 10 zł. pour les ***Membres effectifs*** (ayant droit de faire des communications, de prendre parole dans les discussions et de voter) et à 5 zł. pour les ***Membres associés*** (ayant droit d'assister à toutes les séances et manifestations du Congrès). Tous les participants ont reçu, quelques jours avant l'ouverture du Congrès, le ***Programme définitif***, contenant la liste des Membres, les titres et résumés des communications annoncées, l'horaire et autres renseignements utiles. Le ***Bureau d'Information*** pour les congressistes, installé à la Gare Centrale de Varsovie (dans le kiosque des Compagnies Wagons-Lits & Cook), distribuait aux arrivants les plans de la ville, les adresses des logements etc. Les jetons et les ***Cartes de Membre***, donnant droit au tarif réduit aux tramways, ainsi que les certificats de réduction de 50 % sur le trajet-retour aux Chemins de Fer de l'Etat (pour les participants étrangers jusqu'au point frontière de leur choix) etc. ont été délivrés aux Membres du Congrès par le ***Secrétariat du Congrès*** qui fonctionnait en permanence au ***Siège du Congrès*** dans le Palais de l'École Polytechnique de Varsovie, où se trouvaient aussi une Agence des Postes, un Buffet chaud et un Salon de lecture avec des quotidiens à la disposition des congressistes.

Les renseignements sur le Congrès et son ouverture prochaine ont été annoncés par plusieurs journaux de la capitale et de province. Au cours du Congrès, les bulletins quotidiens sur ses travaux ont été envoyés à la presse par le Secrétariat du Congrès par l'intermédiaire de l'Agence Télégraphique Polonaise (P.A.T.), et un article détaillé sur le Congrès a paru le 15 octobre 1937 dans le N° 17 du »Przegląd Pedagogiczny«. Le 1 octobre le Secrétaire général du Congrès a parlé à Polskie Radio sur le dévéloppement des mathématiques en Pologne et sur le rôle des congrès mathématiques en général, et le 7 octobre il a fait au même poste radiophonique une conférence sur l'activité scientifique, pédagogique et sociale du Professeur Dickstein, en rapport avec son jubilé.

Le Comité d'Organisation du Congrès tient à remercier ici tous ceux qui ont bien voulu contribuer à sa tâche: en premier lieu le Ministère de l'Instruction Publique et des Cultes, qui l'a subsidié des fonds nécessaires pour la réalisation du Congrès, le

Ministère des Communications pour les réductions sur les billets de Chemins de Fer, accordées aux congressistes, la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie pour la réception offerte aux arrivants dans son siège au Palais Staszic le 28 septembre, et pour avoir accordé le 1 octobre 1937 la Grande Salle du palais à la séance solennelle du ***Jubilé du Professeur Dickstein***, et Monsieur le Recteur de l'École Polytechnique de Varsovie pour avoir mis à la disposition du Congrès le Palais de l'École.

Le Comité d'Organisation exprime aussi sa gratitude au ***Comité des Dames*** pour avoir organisé au Palais Staszic la ***Réunion de présentation*** le 28 septembre 1937 et s'être occupé des Membres associés; à la Direction des Tramways de Varsovie pour le tarif réduit, accordé aux Membres du Congrès; à la Compagnie Wagons-Lits & Cook pour avoir mis son kiosque à la gare à la disposition du Bureau d'Information du Congrès; à Madame Alexandre Sierpińska pour le projet du jeton; enfin, à MM. les étudiants de l'Université Joseph Piłsudski et de l'École Polytechnique de Varsovie qui ont prêté leurs concours actif aux travaux de l'organisation du Congrès.

II. Séance d'ouverture. L'acte solennel d'ouverture du Congrès a eu lieu le 29 septembre 1937 à 10 h. du matin dans le Grand Auditoire (Aula) de l'École Polytechnique. Le discours d'ouverture a été prononcé par M. W. Sierpiński, Président du Comité d'Organisation. Après avoir salué les autorités et les délégués officiels présents: M. le Docteur St. Michalski, Directeur de l'Institut de la Culture Nationale Joseph Piłsudski, M. J. Pohoski, Vice-président de la Ville de Varsovie, M. le Professeur W. Antoniewicz, Recteur de l'Université Joseph Piłsudski à Varsovie, M. le Professeur J. Zawadzki, Recteur de l'École Polytechnique de Varsovie, et souhaité la bienvenue aux hôtes et délégués étrangers, M. Sierpiński a passé en revue dans la suite de son discours le développement des mathématiques en Pologne au cours des 6 dernières années. En voici le texte original:

»Obecny nasz Zjazd jest 3-im z kolei Polskim Zjazdem Matematycznym, aczkolwiek już 4-ym Zjazdem matematyków w Polsce. Pierwszy Polski Zjazd Matematyczny odbył się we Lwowie w r. 1927, drugi w Wilnie w r. 1931. Zgodnie z uchwałami, powziętymi na tych Zjazdach, powinny one się odbywać co 4 lata, tak iż III Polski Zjazd Matematyczny winien był się odbyć

już przed dwoma laty. Na przeszkodzie temu stanęła reorganizacja Polskiego Towarzystwa Matematycznego, które właśnie miało się zająć urządzeniem Zjazdu, a właściwie nie tylko sama reorganizacja, która już na wiosnę zeszłego roku została przeprowadzona, ale również blisko rok trwające zabiegi o zalegalizowanie nowego Statutu Towarzystwa.

Zjazd obecny jest pierwszym Polskim Zjazdem Matematycznym, który się odbywa w stolicy Państwa. Odbył się jednak już w Warszawie inny zjazd matematyków, nie tylko polskich, mianowicie w r. 1929 I Kongres Matematyków Krajów Słowiańskich. Należy żałować, że matematycy polscy, z przyczyn od nich niezależnych, a z nauką nic wspólnego nie mających, nie mogli wziąć udziału w II Kongresie Matematyków Krajów Słowiańskich, który odbył się w Pradze w r. 1934. Mamy jednak nadzieję, że delegacja polska weźmie udział w III takim Kongresie, który ma się odbyć za 2 lata w Jugosławii.

W ostatnich czasach podnoszone były, nawet w druku, wątpliwości co do pożytku płynącego ze zjazdów naukowych, przy czym wysuwane były życzenia co do reformy takich zjazdów, polegające np. na wyznaczaniu z góry pewnych tematów, mających stanowić wyłączny przedmiot obrad zjazdu. Może w innych naukach jest inaczej, ale ogół matematyków uważa Zjazdy matematyczne nie tylko za pożyteczne, ale nawet za konieczne, a Komitet organizacyjny nie widział potrzeby zmiany dotychczasowego sposobu odbywania zjazdów matematycznych, gdzie komunikaty są dopuszczane na dowolny temat matematyczny bez ograniczania ich liczby. Oczywiście Zjazd będzie mógł się wypowiedzieć, czy na przyszłość pożądane są jakie zmiany w tym względzie.

Rozpoczynając III Polski Zjazd Matematyczny, warto sobie zdać sprawę z ważniejszych wydarzeń, tyczących się Matematyki polskiej, jakie zaszły od czasu poprzedniego naszego Zjazdu. Możemy przede wszystkim z radością stwierdzić dalszy pomyślny rozwój matematyki polskiej w ciągu ostatniego sześciolecia. Wyraża się on w pokaźnej liczbie tomów wydawnictw matematycznych, które się przez ten czas w Polsce ukazały, jako to: 12 dalszych tomów »Fundamenta Mathematicae«, 7 tomów »Monografij Matematycznych«, 4 tomy »Studia Mathematica«, 7 tomów »Prac Matematyczno-Fizycznych«, 12 tomów »Wiadomości Matematycznych«, 5 tomów »Rocznika Polskiego Towarzystwa Matematycznego«, razem w ciągu 6 lat około 50 tomów specjalnych wydawnictw matematycznych w Polsce. Liczne prace matematyków naszych ukazały się również w tym czasie w Biuletynie Polskiej Akademii Umiejętności, w Sprawozdaniach Towarzystwa Naukowego Warszawskiego oraz w szeregu wydawnictw zagranicznych. Te prace naszych autorów zawierają wiele nowych wyników naukowych z różnych działów matematyki, często rozwiązania trudnych zagadnień, nieraz nowe metody badań. Stanowią one ważny przyczynek do rozwoju współczesnej matematyki, zwłaszcza teorii mnogości, topologii, teorii operacyj oraz teorii funkcji zmiennej rzeczywistej.

Warto też zaznaczyć, że w wydawnictwach polskich ukazało się w ostatnim sześcioleciu wiele prac matematyków zagranicznych, co dowodzi ścisłej

naszej współpracy z nauką światową. Jakim uznaniem pewne działy matematyki polskiej cieszą się zagranicą, dowodzi np. fakt, że jeden z wybitnych profesorów amerykańskich, z okazji 25-ego tomu »Fundamenta Mathematicae« napisał w Biuletynie Amerykańskiego Towarzystwa Matematycznego, że historia »Fundamenta Mathematicae« jest zarazem historią współczesnej teorii funkcji zmiennej rzeczywistej. Dowodem zaś uznania dla wysokiego poziomu naszej topologii jest fakt, że na ostatnim Międzynarodowym Kongresie Matematycznym w Oslo, uchwalono dezyderat odbycia II Międzynarodowej Konferencji Topologicznej w Warszawie w r. 1939.

Warto też podnieść niezwykłe zdarzenie, nie tylko u nas, ale wogóle w świecie naukowym, że jedno z naszych wydawnictw matematycznych, mianowicie wspomniane już »Fundamenta Mathematicae«, musiało przystąpić do przedruku swego I tomu, który całkowicie został wyczerpany, a który chce posiadać każda niemal biblioteka uniwersytecka na świecie. Inne znowu nasze wydawnictwo, »Monografie Matematyczne«, które właśnie powstało w ostatnim sześcioleciu, wypuściło świeżo nowe, tym razem angielskie wydanie »Teorii całki« Doc. Dra Saksa, gdyż poprzednie, francuskie wydanie tej książki z r. 1933, zostało wyczerpane.

Łączność matematyki polskiej z matematyką światową wyrażała się też w licznych w ostatnich latach wizytach w Polsce matematyków zagranicznych, mianowicie francuskich, angielskich, amerykańskich, rumuńskich, czeskich, austriackich, jugosłowiańskich, belgijskich, bułgarskich, hinduskich, chińskich i japońskich, którzy przyjeżdżali do nas, bądź zaproszeni na wykłady, bądź dla nawiązania kontaktu z naszymi matematykami, bądź wreszcie na studia, jako stypendyści. Nawzajem, matematycy polscy byli w tym czasie niejednokrotnie zapraszani zagranicę, bądź dla wygłoszenia wykładów w różnych uniwersytetach europejskich lub amerykańskich, bądź też dla wzięcia udziału w kongresach naukowych. Warto też zaznaczyć, że już stało się zwyczajem, iż na Międzynarodowych Kongresach Matematycznych Polska otrzymuje jedną z wiceprezesur Kongresu.

Za pomyślny dla rozwoju matematyki polskiej fakt musimy uważać utworzenie Naukowego Komitetu Matematycznego przy powstałej przed rokiem Radzie Nauk Ścisłych i Stosowanych. W ten sposób matematyka polska zyskała organ, który stale będzie czuwał nad jej potrzebami. Pomyślnym też faktem była reorganizacja Polskiego Towarzystwa Matematycznego, będąca właściwie głęboką zmianą ustroju Towarzystwa w kierunku niejako federacyjnym. Tendencją tej reformy była chęć, aby wszystkie ośrodki matematyczne w Polsce mogły się rozwijać samodzielnie i niezależnie. Położyła ona kres pewnym tarciom w łonie naszego Towarzystwa Matematycznego, których wynikiem było, między innymi, opóźnienie terminu obecnego Zjazdu.

Skoro mówię o pomyślnych dla matematyki polskiej wydarzeniach w ostatnim sześcioleciu, nie mogę pominąć też pewnego bardzo niepomyślnego i smutnego. Oto po zmianie w r. 1933 ustawy o szkołach akademickich, dwie katedry matematyki zostały zniesione, a jeden z profesorów utraconej katedry dotąd nie odzyskał. Stało się to ze względów nic z interesem

nauki, ani nawet Skarbu Państwa wspólnego nie mających. Została wyrządzona krzywda i nauce i zasłużonemu matematykowi, krzywda, którą — nie wątpimy — Ministerstwo W. R. i O. P. zechce wkrótce naprawić, jak to już uczyniło w szeregu innych analogicznych wypadków. Ponieważ odnośne artykuły ustawy o szkołach akademickich z r. 1933 należą już do smutnej przeszłości, więc nie wątpimy, że już nigdy nie powtórzy się w Polsce pożałowania godny fakt, żeby profesor szkoły akademickiej był pozbawiony katedry.

Kończąc swoje przemówienie, winienem podkreślić, że ten pomyślny w ostatnich latach rozwój matematyki polskiej nie byłby możliwy, gdyby nie stałe i życzliwe poparcie potrzeb naszej nauki przez Ministerstwo W. R. i O. P. oraz przez Zarząd Funduszu Kultury Narodowej. Poparcie to wyrażało się w przyznawaniu zasiłków na różne wydawnictwa matematyczne, które bez tych subwencyj nie mogłyby się ukazywać, w umożliwianiu matematykom polskim brania udziału w Kongresach zagranicznych przez udzielanie im paszportów ulgowych lub bezpłatnych, a niekiedy i zasiłków na wyjazd, wreszcie w przyznawaniu młodszym pracującym naukowo matematykom stypendiów na studia krajowe lub zagraniczne. Także i obecny Zjazd dochodzi do skutku dzięki subwencji na ten cel Wydziału Nauki. Za ten życzliwy stosunek do nauki naszej należy się wdzięczność matematyków polskich dla Ministerstwa W. R. i O. P. oraz dla Funduszu Kultury Narodowej.

Otwierając III Polski Zjazd Matematyczny, życzę, aby się przyczynił jaknajwydatniej do dalszego pomyślnego rozwoju Matematyki polskiej«.

Prirent la parole les délégués officiels polonais et étrangers en souhaitant bon succès au Congrès. M. P. Sergescu a dit dans son discours:

»Il y a dix ans, j'ai pris part au I Congrès Polonais de Mathématique à Lwów. Ce fût mon premier contact personnel avec les savants polonais. J'ai été conquis d'emblée par la profondeur des travaux de vos maîtres et par l'organisation de votre travail scientifique, dont les manifestations, célèbres dans le monde entier, sont vos revues: *Fundamenta Mathematicae*, *Studia Mathematica* et *Prace Matematyczno-Fizyczne*. J'ai été ravi de l'hospitalité polonaise, pleine de grâce. Depuis dix ans, je viens régulièrement à tous les congrès de mathématique ou d'histoire des sciences organisés en Pologne, et me voici pour la cinquième fois chez vous, apportant les voeux de la part de la *Société Roumaine de Mathématique* et de l'*Université de Cluj* pour la meilleure réussite de votre Congrès.

Dans l'intervalle de dix ans, les relations scientifiques polono-roumaines se sont beaucoup resserrées. Le Professeur Sierpiński a fait le grand honneur à l'Université de Cluj d'y avoir donné des cours à trois reprises; aussi, il a fait des leçons à nos universités roumaines de Bucarest et de Jassy. MM. Mazurkiewicz et Sierpiński sont Membres d'honneur de l'Académie Roumaine. La revue roumaine *Mathematica*, soeur cadette des *Fundamenta*

Mathematicae, a joui dès le début de l'appui des mathématiciens polonais éminents. MM. Biernacki et Sierpiński y ont publié de précieux articles dans chaque tome, et plus de vingt mathématiciens polonais ont donné à *Mathematica* de l'éclat par leurs articles. Aux deux Congrès des Mathématiciens Roumains, frères cadets des congrès polonais, nous avons eu la joie d'accueillir les maîtres polonais; au I Congrès M. Sierpiński était venu seul, mais il a été accompagné de quinze mathématiciens polonais au II Congrès. M. Kuratowski nous a donné des leçons de topologie dont on garde à Cluj un souvenir excellent.

A leur tour, les roumains viennent de plus en plus nombreux à vos Congrès. Seul que j'étais au I Congrès, j'ai aujourd'hui la joie de vous parler au nom d'une Délégation Roumaine composée de représentants des Universités de Bucarest, Cernauti et Cluj.

Cette heureuse évolution des liens scientifiques polono-roumains est due au grand pouvoir d'attraction que vous exercez et à l'esprit animateur du Professeur Sierpiński.

Aujourd'hui, au moment où les relations de politique et de culture entre Pologne et Roumanie deviennent de plus en plus étroites et où l'on tend à aboutir à une espèce d'*union polono-roumaine*, les mathématiciens des deux nations sont heureux et fiers d'avoir été les premiers pionniers de ce rapprochement, imposé par notre histoire, notre situation géographique et économique, ainsi que par les circonstances politiques.

C'est dans ces sentiments que je souhaite de tout coeur, au nom des mathématiciens roumains, la plus grande gloire et le plus grand succès à la mathématique polonaise. Je tiens à vous remercier, très ému, pour le grand honneur qui m'est fait et qui s'adresse évidemment, par-dessus de ma tête, à mon Pays. Je tâcherai d'emporter de chez vous de nouveaux éléments pour le développement en Roumanie de l'amour et de l'admiration envers la Pologne et la science polonaise.

Vive la Pologne! Vive la mathématique polonaise!«

Ensuite, élu à l'unanimité *Président du Congrès*, M. Sierpiński proposa d'envoyer au nom du Congrès des télégrammes d'hommage à Monsieur le Professeur Dr. Ignacy Mościcki, Président de la République Polonaise, et Monsieur le Maréchal Edward Śmigły-Rydz, Chef de l'Armée, lui déclarant l'intention des mathématiciens polonais de collaborer à la défense nationale.

Cette motion adoptée à l'unanimité, l'assemblée procéda à l'élection des autres membres du *Bureau du Congrès*. Proposés par M. Sierpiński, ont été élus par acclamation:

Présidents d'honneur du Congrès: S. Dickstein, Professeur honoraire à l'Université de Varsovie, et P. Sergescu, Professeur à l'Université de Cluj (Roumanie).

Vice-présidents du Congrès: M. Biernacki, Professeur à l'Université de Poznań, S. Kempisty, Professeur à l'Université de Wilno, F. Leja, Professeur à l'Université de Kraków, S. Mazurkiewicz, Professeur à l'Université de Varsovie et S. Ruziewicz, a. Professeur à l'Université de Lwów.

Secrétaire du Congrès: K. Zarankiewicz, Chargé de cours à l'Ecole Polytechnique de Varsovie.

Présidents des Sections: I. H. Steinhaus, Professeur à l'Université de Lwów, II. E. Żyliński, Professeur à l'Université de Lwów, III. C. Kuratowski, Professeur à l'Université de Varsovie, IV. M. Huber, Professeur à l'Ecole Polytechnique de Varsovie, V. S. Straszewicz, Professeur à l'Ecole Polytechnique de Varsovie.

Commission des Amendements: M. Biernacki, C. Kuratowski, F. Leja, S. Ruziewicz, S. Straszewicz, K. Zarankiewicz et A. Zygmund.

Avant de lever la séance, M. Sierpiński a donné lecture des lettres et télégrammes parvenus au Comité d'Organisation.

III. Conférences plénières. Elles avaient lieu le 29 sept. de 11 à 13 h., le 30 sept. de 10 à 11 h. 30 m., le 1 et 2 oct. de 10 h. à midi.

1. Biernacki M. ***Sur les domaines formés par les points représentant les valeurs d'une fonction analytique*** (à paraître dans Mathematica, Cluj).

2. Huber M. ***Problèmes de mathématiques appliquées dans les sciences techniques*** (à paraître dans Czasopismo Techniczne, Lwów).

3. Kuratowski C. ***Sur les familles monotones d'ensembles fermés et leurs applications à la théorie des espaces connexes*** (à paraître dans Fundamenta Mathematicae 30, Warszawa 1938).

4. Mazurkiewicz S. ***Sur les fondements de la théorie des probabilités.***

5. Sierpiński W. ***Sur les familles dénombrables d'ensembles*** (à paraître dans Wiadomości Matematyczne, Warszawa).

6. Steinhaus H. ***Théorie et applications des fonctions indépendantes au sens stochastique*** (à paraître dans Actualités Scientifiques et Industrielles, édition Hermann, Paris).

Définition des fonctions stochastiquement indépendantes. Critère d'indépendance. La courbe de Peano. La loi-limite du calcul des probabilités. Le modèle de P. et T. Ehrenfest. Le mouvement brownien. L'intervalle infini. Les cosinus comme exemple de fonctions indépendantes. Superposition des oscillations harmoniques comme explication des phénomènes qui obéissent à la loi de Gauss. La fonction Zéta. Généralisations des critères qui conduisent à d'autres distributions-limites que celle de Gauss.

7. Ważewski T. ***Sur les problèmes fondamentaux liés au problème de Cauchy dans le domaine des équations partielles d'ordre 1.***

8. Zygmund A. ***Résultats récents des théories des séries trigonométriques, des séries orthogonales et des interpolations.***

IV. Travaux des Sections. Les séances des 5 Sections du Congrès ont été tenues quotidiennement aux auditoires de l'Ecole Polytechnique de Varsovie.

I Section. Fondements des Mathématiques, Théorie des ensembles, Théorie des fonctions réelles.

Président de la Section: H. Steinhaus.
Présidents des séances: A. Lindenbaum et E. Szpilrajn.
Séances: 29 et 30. IX de 16 à 18 h. 30 m. et 2. X de 16 à 18 h.

Communications:

1. Cesari L. ***Sulle funzioni di più variabili a variazione limitata e sulla convergenza delle serie multipli di Fourier.***

Si dimostra che le funzioni di due o più variabili a variazione limitata secondo Tonelli presentano in quasi tutti i punti del loro campo di definizione certi limiti che vengono precisati nel testo. Si dimostra poi che per le funzioni di due variabili a variazione limitata la relativa serie doppia di Fourier converge quasi ovunque verso la funzione stessa. Per le funzioni di $r > 2$ variabili si dimostra che ciò accade ancora, ma sotto una ulteriore condizione che garantisce, in base a teoremi di Saks e di Zygmund, l'esistenza di opportune derivate di campo.

2. Chwistek L. ***Construction des nombres transfinis dans le système de mathématique symbolique*** (à paraître dans l'Archive de la Soc. des Sc. de Léopol).

Le système de la sémantique rationnelle ne comporte que des classes dénombrables. On peut pourtant y reconstruire la théorie générale des ensembles, en se servant des expressions de type variable, et en les étudiant à l'aide des invariants sémantiques. Cette méthode est au fond la description rigoureuse de ce qu'on fait en réalité dans la théorie classique.

3. Fried H. *Über projektive Funktionen.*

Die Wertmenge einer reellen Funktion $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$, für die $\underset{x}{E}[f(x) > p]$ eine projektive Menge n-ter Klasse ist, ist eine projektive Menge $(n+1)$-ter Klasse. Umkehrung dieses Satzes.

4. Hetper W. *Problèmes fondamentaux de la sémantique élémentaire* (voir *Relations ancestrales dans le système de sémantique*, à paraître dans l'Archive de la Soc. des Sc. de Léopol).

Dans le système de la sémantique élémentaire, on peut définir la notion la plus générale de relation ancestrale. On peut construire à l'aide de cette relation l'arithmétique des nombres rationnels, la notion de substitution et la notion de théorème.

5. Kempisty S. *Application des fonctions de triangle à la théorie de l'aire d'une surface courbe* (à paraître dans les Travaux de la Soc. des Sc. et des Lettres de Wilno).

M. H. Rademacher a montré que l'aire du polyèdre inscrit dans la surface $z = f(x, y)$ tend vers l'intégrale

$$\int\int_R \sqrt{1 + (\partial f / \partial x)^2 + (\partial f / \partial y)^2}\, dx\, dy$$

lorsque les projections des faces du polyèdre sur le plan xy vérifient une condition de régularité, f satisfaisant à la condition de Lipschitz. En se servant de la dérivée et de l'intégrale d'une fonction de triangle, l'auteur établit une condition nécessaire et suffisante qui remplace la condition de Lipschitz.

6. Kobrzyński Z. *Sur la convergence des séries logiques.*

Une suite de propositions $\{z_n\}$ est dite convergente, lorsque tous ses termes sont vrais à partir d'un indice suffisamment grand. La suite $\{s_n\}$ où $s_1 = (z_1 \rightarrow z)$ et $s_{n+1} = (z_{n+1} \rightarrow s_n)$ s'appelle série logique impliquant z. La notion de série logique permet de construire des fonctions dont les propriétés rappellent celles du quantificateur général.

7. Lindenbaum A. *Numérotage des types logiques.*

Types ontologiques et métalogiques. Comparaison de la notation des types introduite par M. Ajdukiewicz (Studia Philos. 1, 1935) avec un nouveau numérotage à l'aide des entiers non négatifs. Questions théoriques fondamentales qui s'y rattachent.

8. Nikodym O. *Sur les corps boreliens de sous-espaces de l'espace de Hilbert.*

Tout anneau de sous-espaces de l'espace de Hilbert se laisse prolonger à un corps borelien.

9. Ruziewicz S. ***Généralisation d'un théorème de M. Sierpiński.***

Généralisation du th. en question (voir W. Sierpiński, *Un théorème de la théorie générale des ensembles...*, C. R. Soc. Sc. Varsovie 28, 1935) aux nombres cardinaux arbitraires, et quelques remarques qui s'y rattachent.

10. Sierpiński W. ***Sur un problème concernant les fonctions mesurables*** (Annales Scient. Univ. Jassy 14, 1938, p. 154).

11. Szpilrajn E. ***Sur la fonction caractéristique d'une suite d'ensembles*** (à paraître dans Mathematica, Cluj).

La fonction caractéristique $c_e(x)$ d'une suite $e=\{E_n\}$ d'ensembles situés dans un espace X quelconque est définie dans X par la fraction ternaire $c_e(x)=(0,i_1,i_2,\dots)_3$, où le chiffre i_n est égal à 0 ou à 2, suivant que $x\in X-E_n$ ou $x\in E_n$. Cette notion (envisagée par l'auteur dans Fund. Math. 26, pp. 305-308) peut être considérée comme une généralisation de celle de fonction caractéristique d'un ensemble; elle comporte de nombreuses applications dans la théorie des ensembles.

12. — ***Remarques sur les superpositions des fonctions*** (à paraître dans Fundam. Math. et Duke Mathem. Journal).

Certaines propriétés des fonctions $f[g(x)]$ où g est une fonction croissante et f est une fonction à propriété de Baire, une fonction mesurable au sens de Lebesgue, une fonction absolument continue, etc.

13. Tarski A. ***Calcul propositionnel et topologie.***

II Section. Analyse, Algèbre, Théorie des nombres.

Président de la Section: E. Żyliński.

Présidents des séances: S. Bergman et O. Nikodym.

Séances: 29. IX et 30. IX de 16 à 18 h. 30 m., 1. X de 12 à 13 h. et de 16 h. 30 m. à 19 h. 30 m., 2. X de 12 à 13 h. et de 16 à 19 h.

Communications:

1. Bergman S. ***Sur les équations différentielles partielles linéaires.***

Etant donnée une équation linéaire quelconque $\Delta F(x,y)=0$, il existe toujours une fonction $E(x,y,t)$ telle que l'ensemble des solutions de cette équation peut être présenté sous la forme

$$F(x,y)=\int_{-1}^{+1} E(x,y,t)[f(u)+g(v)]\,dt,$$

où $2u=(x+iy)(1-t^2)$, $2v=(x-iy)(1-t^2)$ et f,g sont des fonctions analytiques arbitraires. Ce théorème permet d'appliquer les méthodes de la théorie des fonctions d'une variable complexe à l'étude de l'équation en question.

2. Bratu G. ***Sur un théorème de M. Pompeiu.***

Démonstration qu'avec l'hypothénuse et les deux diagonales d'un trapèze rectangle on peut toujours construire un triangle. Ce théorème permet de généraliser celui de M. D. Pompeiu, Bull. Ecole Polyt. Bucarest, 6-ème année.

3. Fréchet M. ***Sur les fonctions linéairement indépendantes*** (voir ***Sur la limitation des conséquences à tirer de l'évanouissement d'un wronskien***, Bull. Math. des Fac. des Sciences 3 (1936), p. 105-109, et ***Sur un paradoxe mécanique***, Praktika Acad. Athènes 12 (1937), p. 229-233.

Etude des relations entre n fonctions (supposées seulement dérivables jusqu'à l'ordre $n-1$ sur un intervalle I) dont le wronskien reste nul sur I, sans qu'elles vérifient sur I une même relation linéaire. Applications à la mécanique.

4. — ***Un problème d'arithmétique et d'algèbre.***

L'auteur signale une curieuse propriété arithmétique de l'équation séculaire, découverte à l'occasion d'un problème de probabilités en chaîne par M. Hostinsky, complétée par M. Potoček et transformée par l'auteur (dans un cas plus général) en une propriété algébrique. Cette propriété étant démontrée pour les degrés 2, 3 et 4, le problème consiste à chercher si elle s'étend à tous les degrés. L'énoncé précis du problème, débarassé des considérations de probabilités qui y ont conduit, se trouvera à la note D vers la fin du ***Second Livre*** (en cours d'impression chez Gauthier-Villars, Paris) des ***Recherches théoriques modernes sur le Calcul des Probabilités.***

5. Kerner M. ***Problèmes du calcul des variations concernant l'intégrale superficielle.***

Existence du champ d'extrémales. Formule et condition de Weierstrass. Courbure des lignes et surfaces transverses. Problème auxiliaire de troisième type pour une équation à dérivées partielles. Condition de Jacobi-Lichtenstein dans les problèmes de frontière immobile, de frontière située sur une surface donnée et de surface close.

6. Krzyżański M. ***Sur le cas limite du problème de Cauchy pour les équations paraboliques.***

On cherche la solution de l'équation du type parabolique

$$\sum_{ik=1}^{m-1} a_{ik}(x_1, x_2, \dots, x_m) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = b \frac{\partial u}{\partial x_m} + \sum_{j=1}^{m-1} b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + cu + f \tag{1}$$

avec la condition $u(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, 0) = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{m-1})$. On considère (1) comme cas limite de l'équation hyperbolique

$$\sum_{ik=1}^{m-1} a_{ik}(x_1, x_2, \dots, x_m) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{1}{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2} = b \frac{\partial u}{\partial x_m} + \sum_{j=1}^{m-1} b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + cu + f. \tag{2}$$

On résoud le problème de Cauchy pour (2), en appliquant les résultats de M. Schauder et en admettant pour données initiales la fonction φ et les valeurs de $\partial u/\partial x_m$ calculées d'après (1). On évalue ensuite la solution u_n, obtenue ainsi indépendamment de n. La limite de u_n est précisément la solution du problème.

7. Leja F. *Sur les suites des polynômes homogènes bornées sur une courbe* (à paraître dans les Annales Acad. des Sc. Techn. Varsovie).

Soit $P_n(x,y)=a_{n,0}x^n+a_{n-1,1}x^{n-1}y+\ldots+a_{0,n}y^n$ où $n=1,2,\ldots$ L'auteur donne la démonstration et quelques applications du théorème suivant:

Si la suite $\{P_n(x,y)\}$ est bornée au moins presque partout sur une courbe C issue d'un point $A(x_0,y_0)$ et satisfaisant à une condition assez générale, on peut faire correspondre à chaque $0<\varepsilon<1$ un voisinage à 4 dimensions V de A dans lequel la suite $\{P_n(x,y)\cdot(1-\varepsilon)^n\}$ tend uniformément vers 0.

8. Lubelski S. *Etat actuel de la théorie systématique des nombres VI: Réduction des formes quadratiques* (voir *Über die allgemeine Theorie der quadratischen Formen*, à paraître dans Acta Arithmetica 3).

L'auteur signale un procédé qui permet de généraliser la théorie de la réduction de Gauss à un nombre quelconque $n\geqslant 3$ de variables et qui donne pour le plus petit nombre représentable par la forme quadratique $f=\sum a_{ik}x_ix_k$ une limite meilleure que celle d'Hermite. On obtient aussi $\Pi a_{ii}\leqslant\mu D$, où D désigne la discriminante de f et μ est un nombre bien déterminé, tandis que, dans la théorie d'Hermite, la seule propriété connue de μ est son indépendance de x.

9. — *Etat actuel de la théorie systématique des nombres VII: Composition des formes quadratiques* (Journ. für Math. 174, p. 160-184 et 176, p. 56-60; voir aussi *Zu den Grundlagen der Polynomformentheorie*, à paraître dans Acta Arithmetica).

L'auteur signale la possibilité de transporter dans le domaine des corps algébriques la théorie de la composition des formes quadratiques de Gauss et donne des démonstrations arithmétiques de quelques théorèmes démontrés jusqu'à présent par voie analytique. Il examine enfin la question de l'arithmétisation d'un corps biquadratique à l'aide d'une combinaison des systèmes de triplets de formes quadratiques binaires.

10. Marcinkiewicz J. *Sur la convergence unilatérale des séries orthogonales.*

Toute suite orthogonale normale $\{\varphi_n\}$ de fonctions bornées dans leur ensemble contient une suite partielle $\{\varphi_{n_k}\}$ telle que si la série $\Sigma a_k\varphi_{n_k}$ est presque partout bornée inférieurement, on a $\Sigma a_n^2<\infty$.

11. M a z u r S. et O r l i c z W. ***Sur les espaces métriques linéaires.***

Le théorème fondamental concernant les espaces (B) est généralisé aux ainsi dits espaces (B_0). De nouveaux problèmes qui concernent la notion d'ensemble normant (d'éléments ou de fonctionnelles) sont discutés en premier lieu; leur solution facilite l'accès aux domaines plus difficiles de la théorie des opérations, en particulier à celle de l'équation linéaire.

12. P i c c a r d S. ***Sur les bases du groupe symétrique et du groupe alternant*** (présenté par K. Z a r a n k i e w i c z).

Quel que soit le nombre entier $n>2$, le groupe symétrique alternant d'ordre $n!(n!/2)$ possède des couples de substitutions qui permettent d'engendrer le groupe en question. On appelle ***base*** tout couple de substitutions génératrices du groupe. La communication comporte l'énoncé de dix propositions concernant les bases.

13. S e r g e s c u P. ***Remarques sur l'intégration de certaines équations différentielles.***

Soit l'équation linéaire à coefficients holomorphes $E(y)=\sum_{n=0}^{\infty} x^n E_n(y)=0$. Toute solution commune aux $E_n(y)=0$ est solution de $E(y)=0$. En particulier, si la somme des coefficients de $E(y)$ est identiquement nulle, $E(y)$ admet l'intégrale e^x. Si $E(y)=0$ admet toutes les solutions de $\eta=F(y)=0$, on a $E(y)\equiv G(\eta)$. Pour intégrer $E(y)=0$, on commence par intégrer $G(\eta)=0$, qui a les solutions η_i ($i=1,2,...,p-s$), et ensuite on intègre les $p-s$ équations linéaires $F(y)=\eta_i$.

14. S z m u s z k o w i c z H. ***Sur le domaine de convergence de la suite de segments ultraconvergents de la série potentielle avec lacunes d'Ostrowski.***

Le domaine de convergence de la suite des segments ultraconvergents $s_{n_k}=\sum_{n=0}^{n_k} a_n z^n$ de la série $\Sigma a_n z^n$ où $a_n=0$ pour $n_k\cdot d<n<n_k$ (lacunes d'Ostrowski), le nombre $d>0$ étant arbitraire, est contenu dans le cercle de rayon $r=(\overline{\lim}\sqrt[n_k]{a_{n_k}})^{-1/d}$.

15. W a ż e w s k i T. ***Sur l'évaluation des intégrales d'équations différentielles ordinaires et du domaine de leur existence dans le champ de variables complexes.***

16. Z a r e m b a S. K. ***Sur les caractéristiques d'un système de deux équations différentielles ordinaires atteignant un point singulier isolé*** (à paraître dans ces Annales).

Certaines analogies avec le cas d'une équation pourraient faire croire que tout point singulier isolé d'un systéme de deux équations est atteint

par une caractéristique au moins. L'auteur prouve par des exemples que cela peut ne pas avoir lieu (voir ces Annales 15, p. 135-139 (en collaboration avec A. Bielecki) et 16, p. 53-64) et indique une condition suffisante pour que le point singulier soit atteint.

17. Zygmund A. ***Démonstration d'un théorème de M. Paley*** (à paraître dans Proc. London Math. Soc.).

18. Żyliński E. ***Quelques remarques sur la théorie des nombres.***

Sur quelques propriétés de la fonction $\varphi(n)$ d'Euler et leurs généralisations. Sur les formules d'inversion additives et multiplicatives.

III Section. Géométrie avec Topologie.

Président de la Section: C. Kuratowski.

Présidents des séances: K. Borsuk, S. Gołąb, B. Knaster.

Séances: 29. IX et 30. IX de 16 à 18 h. 30 m., 1. X de 16 à 18 h. 30 m. et 2. X de 16 à 18 h.

Communications:

1. Borsuk K. ***Quelques relations entre la situation des ensembles et la rétraction dans les espaces euclidiens*** (voir Fund. Math. 29 (1937), p. 191-205).

2. Eilenberg S. ***Sur les points accessibles.***

Etant donné un ensemble compact X situé sur la surface sphérique S_2, soit $\mu(x, X)$ le nombre des composantes de l'ensemble $S_2 - X$ desquelles le point x de X est accessible. L'égalité $\mu(x, X) = n$ est un invariant d'homéomorphie pour $n \geqslant 2$.

3. Freudenthal H. ***Über die Hurewiczschen Homotopiegruppen der Sphären*** (présenté par H. Hopf; à paraître dans Compos. Math.).

Bei festem $k \geqslant 1$ sind für alle $n > k+1$ die $(n+k)$-ten Homotopiegruppen der Sphären S_n miteinander isomorph. Für $k = 1, 3, 7$ sind die Ordnungen dieser Gruppen > 1; und zwar ist die Ordnung $= 2$ für $k = 1$ (dieser Satz über $k = 1$ ist schon früher von Pontrjagin ohne Beweis mitgeteilt worden).

4. Gołąb S. ***Contribution à la théorie des fonctions homogènes.***

Une condition géométrique, nécessaire et suffisante pour qu'une fonction homogène soit dérivable au sens de M. Stolz.

5. Hopf H. ***Zur Topologie der Sphären und der projektiven Räume.***

Satz. Jedem (geordneten) Punktepaar $\{p, q\}$ der Sphäre S_n sei ein »Produkt« $pq \in S_n$ so zugeordnet, daß pq stetig von $\{p, q\}$ abhängt und daß $(-p)q = p(-q) = -(pq)$ ist ($-p$ = Antipode von p). ***Dann ist*** $n = 2^r - 1$.

Anwendung. $f_{ik}(x_1,\dots,x_m)$ seien reelle algebraische Formen ungerader Grade; $i,k=1,\dots,m$; die Determinante $|f_{ik}|$ sei eine definite Form. ***Dann ist*** $m=2^r$.

Beispiele zu Satz und Anwendung sind nur für $r=0,1,2,3$ bekannt.

6. Hurewicz W. ***Über das Zusammenziehbarkeitsproblem.***

7. Kerékjártó B. de. ***Sur la structure des translations topologiques.***

Une transformation topologique du plan en lui-même sans point invariant, conservant le sens, est homéomorphe à une translation, si ses puissances sont uniformément continues. Cette condition peut être remplacée par la suivante: pour tout point P, il y a une suite d'entiers positifs $n_1, n_2, \dots$ telle que les puissances $T^{n_1}, T^{n_2}, \dots$ sont uniformément continues au point P. De là, on obtient des résultats généraux concernant la distribution des points singuliers d'une transformation topologique quelconque du plan en lui-même sans points invariants, conservant le sens.

8. Knaster B. ***Sur les notions de coupure et de séparation dans les continus non péaniens.***

Lorsqu'on considère dans un continu C les coupures et les séparations produites par ses sous-ensembles compacts, l'équivalence des deux notions est, comme on sait, une condition nécessaire pour que le continu C soit péanien (c. à d. image continue du segment rectiligne). Le problème de la suffisance de cette condition est ouvert. L'auteur en signale une solution partielle.

9. Lindenbaum A. ***Sur l'équivalence de deux figures par décomposition en nombre fini de parties respectivement congruentes.***

Aperçu historique du problème. Tendances récentes, quantitatives. Démonstration du théorème suivant (obtenu par l'auteur en 1932 avec concours de M. Waraszkiewicz): Pour que deux rectangles non congruents $a_1 \times b_1$ et $a_2 \times b_2$ soient décomposables chacun en 2 parties congruentes respectivement avec celles de l'autre, il faut et il suffit que a_1/a_2 ou b_1/b_2 soit égal à $(k+1)/k$ pour un k entier positif. Autres théorèmes qui s'y rattachent.

10. Sosnowski W. ***Un système d'axiomes du plan complexe.***

Un système d'axiomes indépendants qui implique les théorèmes fondamentaux sur le plan projectif complexe, en particulier le principe de dualité.

11. — ***Une interprétation du plan complexe dans l'espace à 4 dimensions.***

L'existence dans cet espace des systèmes de plans, isomorphes à l'ensemble des droites du plan complexe. Un procédé permettant de déterminer deux systèmes de ce genre et de résoudre par la méthode descriptive les problèmes fondamentaux de liaison et d'intersection.

12. Straszewicz S. *Un théorème sur la largeur des ensembles convexes.*

M_1, M_2 et M_3 étant des ensembles convexes plans, $M_1 \subset M_2 + M_3$ entraîne $\delta(M_1) \leqslant \delta(M_2) + \delta(M_3)$ où $\delta(M_i)$ désigne le minimum de largeur des bandes à bords parallèles contenant M_i. L'égalité n'a lieu que dans certains cas particuliers.

13. Waraszkiewicz Z. *Sur la topologie des trajectoires presque périodiques.*

Théorème. Les trajectoires des mouvements périodiques-limites sont identiques aux solenoïdes de van Dantzig (à périodes rationnelles). Généralement, les trajectoires des mouvements presque périodiques sont topologiquement équivalentes aux produits diagonaux des solenoïdes.

Corollaires. Les mouvements presque périodiques et stables au sens de Poisson sont stables au sens de Liapounoff.

La trajectoire du mouvement presque périodique à n périodes indépendantes ne peut être plongée topologiquement, avec ses points-limites, dans aucun espace de dimension $k \leqslant n$.

14. Wrona W. *Neues Beispiel einer Finslerschen Geometrie* (à paraître dans Prace Matem.-Fiz., Warszawa).

15. Wundheiler A. *Fondements de la théorie des objets géométriques.*

Définition de la notion d'objet géométrique (cf. Proc. London Math. Soc. 42, p. 370). Théorème fondamental (»on peut mettre tout sous une forme aussi invariante que l'on veut«): Si $\mathfrak{G}_1$ est un sous-groupe de $\mathfrak{G}$, A_1 un objet dans $\mathfrak{G}_1$, il existe un objet A dans $\mathfrak{G}$ se réduisant à A_1 dans $\mathfrak{G}_1$ et dont la loi de transformation se réduit dans $\mathfrak{G}_1$ à celle de A_1. Généralisations et développements ultérieurs.

IV Section. Mécanique. Théorie des probabilités. Mathématiques appliquées.

Président de la Section: M. Huber.

Président de séance: T. Banachiewicz.

Séances: 29. IX et 30. IX de 16 à 18 h. 30 m., 1. X de 16 à 19 h. 30 m.

Communications:

1. Cesari L. *Organizzazione e recenti conquiste dell' Istituto per le Applicazioni del Calcolo del Consiglio Nazionale delle Ricerche in Roma* (à paraître dans Wiadomości Matematyczne, Warszawa).

2. Chromiński A. *„Mult" — un simple appareil à calculer.*

»Mult« est une modification des bâtons de Néper. Sa construction spéciale permet d'effectuer avec lui les opérations suivantes: multiplication et division par des nombres à plusieurs chiffres et par des fractions ordinaires, réduction des fractions ordinaires en fractions décimales, calcul des puissances, extraction des racines carrées, addition et soustraction. De plus, les opérations composées de la forme $\left(\frac{a}{n} \pm b\right) \cdot c$ ou $\left(\frac{a}{n} \pm b\right) : c$ sont exécutées comme une seule opération. L'appareil est breveté par l'auteur et se trouve dans le commerce.

3. — *Application des cracoviens à la résolution rapide de divers problèmes d'analyse pratique* (à paraître dans le Bull. Acad. Polonaise Cracovie).

4. Felsztyn T. *Collaboration des mathématiciens à la défense nationale.*

Rôle de la science pour la défense de l'Etat. Difficultés du travail technique militaire. Concours que peuvent donner les mathématiciens. Exemples: le rôle des mathématiciens en France pendant la guerre mondiale; quelques problèmes exigeant des solutions; domaines de l'art militaire se prêtant à la collaboration des mathématiciens. L'enseignement des mathématiques dans les écoles secondaires au point de vue des besoins de la défense nationale. Nécessité de developper certaines aptitudes. Possibilités d'assimilation des connaissances liées avec les problèmes de la défense. Exemples. Voies de collaboration.

5. — *Sur la valeur probable d'un coup.*

Définition de la probabilité d'atteinte. Mode de la définir dans le cas d'une cible rectangulaire. Cas de dispersion circulaire. Valeur probable d'un coup dans le tir à une cible annulaire. Cas particulier du centre de dispersion coïncidant avec celui de la cible. Cas général. Difficultés de la solution. Mode de l'aborder. Solution par le calcul approché. Résultat tabellaire. Calcul simplifié par la fonction de compensation. Degré de précision du calcul.

6. Jacob M. *Quelques remarques à la théorie des capitaux accumulés.* (*Sull'applicazione della teoria dei capitali accumulati alla matematica attuariale*, à paraître dans Giorn. Istit. Ital. degli Attuari 9, Roma).

Analyse mathématique de la théorie de Cantelli par l'application des intégrales de Riemann-Stieltjes. L'importance de cette théorie pour ranger dans un système logique toute une série de problèmes de la technique d'assurances sur la vie.

7. Kaczmarz S. *Sur une équation intégrale.*

Courte démonstration du théorème suivant, jouant un rôle dans les problèmes d'aviation: $f(x) \equiv 0$ est la seule solution de l'équation $\int_0^\infty \frac{f(x+t) - f(x-t)}{t} dt = 0$ (dans l'hypothèse de la continuité).

8. Kozakiewicz W. ***Sur les conditions nécessaires et suffisantes de la convergence stochastique.***

L'auteur établit des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une suite de variables aléatoires tende stochastiquement à une variable aléatoire. Ces conditions sont formulées d'abord à l'aide des lois des probabilités et ensuite au moyen des fonctions caractéristiques.

9. Milicer-Grużewska H. ***Théorème sur l'erreur probable pour les fonctions équivalentes non bornées.***

10. Smosarski W. ***Über die Polarisation des Himmelslichtes*** (Gerlands Beiträge zur Geophysik 38, S. 97-111).

11. Stankiewicz L. ***Sur l'évaluation numérique de l'utilité des formules à cracoviens*** (voir ***Sur les opérations arithmétiques dans le calcul des inverses d'après la méthode de M. Banachiewicz***, Bull. Acad. Polonaise Cracovie 1937, p. 363-376, ***Sur les opérations arithmétiques dans le calcul des déterminants suivant les méthodes à cracoviens de M. Banachiewicz***, sous presse ibidem, et ***Sur les opérations arithmétiques dans la résolution numérique d'un système d'équations linéaires suivant les méthodes de M. Banachiewicz***, à paraître ibidem).

12. Urbański W. S. ***Sur les intégrales des équations de la dynamique pour une durée de temps infinie*** (cf. ***Sur l'intégration des équations de Hamilton pour une durée de temps infinie***, Rendiconti Accad. Lincei 1932, p. 105 et ***Sur la structure de l'ensemble des solutions cycliques d'un système d'équations différentielles***, ces Annales 13, p. 44).

Les intégrales périodiques d'un système d'équations différentielles analytiques forment des domaines ou sont de mesure nulle. Dans le dernier cas, les intégrales ne peuvent pas être représentées en coordonnées linéaires comme fonctions mesurables des constantes d'intégration; il y faut introduire des coordonnées angulaires.

13. Wundheiler A. ***Groupes continus de transformations et mouvements rigides généralisés.***

Si l'on regarde les transformations d'un groupe continu comme des mouvements rigides généralisés, les équations fondamentales de Lie définissent »la vitesse de rotation« correspondante et donnent la répartition des vitesses dans le »corps solide«. Pour resserrer l'analogie, il faut établir une correspondance entre les systèmes de coordonnées de l'espace des transformations et de l'espace paramétrique; cette correspondance particulière est interprétée comme l'identité. On aboutit ainsi à une généralisation de la cinématique du corps solide.

14. Zarankiewicz K. *Application des polynômes orthogonaux aux problèmes de la mécanique.*

Plusieurs problèmes de la théorie de l'élasticité et autres se réduisent à déterminer une fonction analytique qui transforme le domaine donné en un domaine plus simple, p. ex. en un cercle ou en un anneau circulaire. L'auteur donne un procédé de calcul pour déterminer de telles fonctions.

V Section. Histoire des Mathématiques. Didactique.

Président de la Section: S. Straszewicz.

Présidents des séances: B. Bielecki et W. Smosarski.

Séances: 1. X de 16 h. 30 m. à 18 h. 30 m. et 2. X de 16 à 18 h

Communications:

1. Birkenmajer A. ***Equations du second degré dans la mathématique babylonienne.***

Le problème de l'existence d'une »algèbre« dans la mathématique babylonienne (opinions de Bortolotti, Neugebauer, Vogel). Types d'»équations« et de méthodes de résolution. Exemples. Théorèmes d'»algèbre« connus des Babyloniens.

2. Chromiński A. ***Une méthode pour esquisser les courbes d'équations.***

On présente l'équation de la courbe cherchée sous la forme $y=F[f(x)]$ où la courbe $y=f(x)$ est donnée graphiquement. On détermine ensuite les points d'intersection de cette dernière avec les droites $y=-1$, $y=0$ et $y=+1$; enfin, on calcule $y=F(-1)$, $y=F(0)$ et $y=F(+1)$, ce qui donne la position des points correspondants de la courbe cherchée, et par suite son esquisse.

3. Dickstein S. ***Michel Jean Hube (à l'occasion du 200-ème anniversaire de sa naissance)*** (voir Wiadomości Matematyczne 53 (1937), Dodatek).

4. Kobrzyński Z. ***Données sur les Cabinet Mathématique de la Société des Sciences de Varsovie à la Bibliothèque Nationale Joseph Piłsudski.***

En juin 1914, M. le Professeur Samuel Dickstein a fait à la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie un don de sa bibliothèque mathématique contenant plus de 10.000 volumes. En incorporant cette bibliothèque dans ses collections, la Société en a formé une unité à part et organisé auprès d'elle un atelier de travail scientifique sous le nom de »Cabinet Mathématique de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie«. En 1928, à la suite du déménagement de la Société, le Cabinet Mathématique a été

transporté de 8 rue Śniadeckich au siège actuel de la Société dans le Palais Staszic, mais il est resté clos et inaccessible au travail scientifique durant 8 ans, à cause de l'insuffisance de la place qui lui a été affectée et des fonds nécessaires au travail et à la conservation des livres. En juin 1936, le Cabinet Mathématique avec sa bibliothèque a été transporté à la Bibliothèque Nationale Joseph Piłsudski dans l'ancien palais Potocki, 32 rue Krakowskie Przedmieście, à titre de dépôt de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie pour 10 ans, et a repris aussitôt son activité. Il y occupe 4 salles au rez-de-chaussée, à savoir, salle de lecture, cabinet du chef, chambre de catalogue et magasin des livres. Le chauffage et l'éclairage est à la charge de la Bibliothèque Nationale, et les travaux les plus importants sont entre les mains d'un employé permanent délégué par cette Bibliothèque, tandis que la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie nomme et prend à sa charge le personnel auxiliaire et fait entrer dans son budget les sommes nécessaires pour la conservation des livres.

L'accès à la bibliothèque du Cabinet Mathématique est soumis au règlement général de la Bibliothèque Nationale: les hommes de science, les étudiants préparant leurs magistériats ou doctorats et autorisés par leurs professeurs peuvent en bénéficier sur place dans la salle de lecture du Cabinet Mathématique ou de la Bibliothèque Nationale, mais les livres ne sont pas prêtés au dehors. Le professeur Dickstein est Chef du Cabinet Mathématique dès la fondation, et le Docteur Z. Kobrzyński est son Assistant titulaire depuis novembre 1936.

Le Cabinet Mathématique est siège du Groupe Polonais adhérent du Comité de l'Académie Internationale d'Histoire des Sciences. M. Dickstein est Président du Groupe, et, depuis avril 1937, M. Kobrzyński, Membre du Groupe, en exerce les fonctions du Secrétaire.

Parmi les livres de la bibliothèque du Cabinet Mathématique sont à mentionner: les oeuvres complètes des classiques (Descartes, Gauss, Kronecker, Lagrange, Laplace, Weierstrass et autres); un recueil d'anciens imprimés mathématiques du XVI, XVII et XVIII siècle, parmi lesquels il y a des exemplaires uniques; des éditions complètes des périodiques mathématiques mondiaux (*Acta Mathematica, Atti dell'Accademia dei Lincei, Journal de Crelle* etc.). Le dépôt du Musée de l'Industrie et de l'Agriculture, composé de 300 oeuvres provenant de la succession d'Alexandre Czajewicz, forme une collection à part.

En outre, le Cabinet Mathématique comprend dans sa bibliothèque un recueil de manuscrits parmi lesquels se trouvent les manuscrits d'Augustin Frączkiewicz, Professeur de l'ancienne École Centrale, de Jean Śleszyński, Professeur à l'Université de Cracovie (don de sa fille, Mme H. Krahelska) et plusieurs autres. La bibliothèque du Cabinet Mathématique s'enrichit régulièrement d'exemplaires des périodiques étrangers provenant de l'échange contre *Prace Matematyczno-Fizyczne,* périodique rédigé et édité depuis 1886 par M. Dickstein, et elle est alimentée constamment de ses dons.

5. Łazowski T. *Manuels de mathématique dans les écoles d'enseignement général.*

Question des manuels en rapport avec les reformes d'organisation et de programme. Revue des manuels. A. Ecole primaire: différents niveaux et variétés d'organisation, problèmes spéciaux, données numériques, types de manuels. B. Gymnases: état actuel et tendances. C. Lycée: état actuel et postulats. Remarques synthétiques.

6. Sergescu P. *L'école parisienne de mathématiques aux XIII et XIV siècles.*

Jordanus Nemorarius (vers 1220) donne une théorie du levier. Albert de Saxe (prof. de 1350 à 1361) définit les limites. Grégoire de Rimini († 1358) postule l'existence de l'infini. Jean Bourdan (1300-1360) supprime la différence entre les corps célestes et terrestres. Nicole Oresme (1323-1382) est un précurseur de la géométrie analytique, du calcul infinitésimal, de l'hypothèse héliocentrique. Nicolas Chuquet donne (en 1484) un exposé de l'algèbre.

7. Steckel S. *Education des élèves doués pour les mathématiques.*

Les programmes de mathématiques et leurs exécutions dans l'enseignement secondaire sont adaptés à l'intelligence d'élève moyen, au détriment des élèves hautement doués. L'auteur traite des mesures didactiques ayant pour but d'assurer le développement des capacités de tels élèves.

8. Włodarski W. *Contributions à la didactique des mathématiques.*

Notion de bilatère (digone) régulier. Problème de l'optimum de hauteur d'une lampe à poulie.

V. Conférence des professeurs et docents en matière de l'enseignement des mathématiques dans les établissements d'études supérieures. La conférence a eu lieu au palais de l'Ecole Polytechnique de Varsovie le 30 octobre de 11 h. 30 m. à 13 h. 30 m. sous la présidence du Professeur S. Ruziewicz, Vice-président du Congrès.

M. S. Kempisty a lu le rapport sur les divers types d'organisation des études mathématiques, actuellement en vigueur aux Universités de Pologne, et a présenté le projet d'une réforme de ces études, élaboré par les professeurs de l'Université de Wilno.

Après une discussion générale, à laquelle prirent part MM. Steinhaus, Dickstein, Ważewski, Żyliński, Knaster, Kuratowski, Tarski, Biernacki, Straszewicz, Kempisty et Bonder, la Conférence vota une résolution dont le texte est cité plus loin (voir 2, p. 205).

VI. Réceptions et excursions. Avant l'ouverture du Congrès, une Réunion de Présentation organisée par le *Comité des Dames* sous la présidence de Mme Anna Sierpińska a été offerte aux arrivants le 28. IX à 20 h. au siège de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie (Palais Staszic, 72 rue Nowy Świat).

Le 29. IX à 20 h. a eu lieu un Cercle des Congressistes au Café Swann (23 rue Nowy Świat).

Le 30. IX et le 1. X deux excursions ont été organisées pour les Membres associés du Congrès: la première, consacrée à la visite du Château et de l'Ancienne Ville, la seconde en autocars à travers les Colonies Staszic et Lubecki, le port d'aviation Okęcie, le Belvédère, Saska Kępa et Zoo.

En relation avec la communication du Docteur Z. Kobrzyński (voir 4, p. 201), une visite du Cabinet Mathématique de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie auprès de la Bibliothèque Nationale (32, rue Krakowskie Przedmieście) a été organisée pour les Membres du Congrès le 1. X à 19 h. 30 m.

Les manifestations du Congrès se sont terminées par un banquet général qui a eu lieu à la salle de l'Hôtel Bristol le 3. X à 19 h. pour les Membres du Congrès et les personnes invitées au jubilé du Professeur Dickstein (voir p. 206).

VII. Séance de clôture. La séance de clôture à eu lieu le 2 octobre à 18 h. sous la présidence de M. Sierpiński.

Au nom de la Commission des Amendements, M. Kuratowski, Secrétaire du Comité Mathématique du Conseil des Sciences Exactes et Appliquées, a lu toutes les résolutions concernant les nécessités de la mathématique polonaise, qui ont été adoptées par ce Comité le 8. III. 1937, ainsi que les résolutions du 17. XII. 1936, qui y sont citées [1]). Ensuite, le Secrétaire général du Congrès, M. Zarankiewicz, a lu au nom de la même Commission les motions suivantes qu'elle a décidé de proposer à l'assemblée:

1. Le Congrès se rallie entièrement aux résolutions adoptées le 8. III. 1937 par le Comité Mathématique du Conseil des Sciences Exactes et Appliquées en matière des nécessités de la mathématique en Pologne.

---

[1]) Voir: ***Protokóły Komitetów Naukowych***, nakł. Polskiej Akademii Umiejętności, Kraków 1937.

2. Le Congrès confie à la Société Polonaise de Mathématique d'envisager les questions de l'enseignement des mathématiques dans les écoles d'études supérieures, à savoir de former par les soins du Bureau de la Société une Commission qui serait chargée de recueillir les matériaux par voie d'enquête et de préparer ses conclusions. La feuille d'enquête devra être basée sur le projet de réforme proposé par les professeurs de l'Université de Wilno (motion votée par la Conférence des Professeurs et Docents, voir plus haut, p. 203).

3. Le Congrès estime comme désirable de convoquer les Congrès Polonais de Mathématique tous les 4 ans et confie à la Société Polonaise de Mathématique le choix de la place et de la date du IV Congrès.

Mises au vote par le Président, chacune de ces trois résolutions a été votée à l'unanimité. Ensuite, l'assemblée a adopté par acclamation les deux motions suivantes:

4. Le Congrès prie son Président, M. le Professeur W. Sierpiński, de transmettre les voeux du Congrès au Professeur Dickstein à la cérémonie de son jubilé du lendemain.

5. Le Congrès exprime ses remerciements au Comité d'Organisation pour l'excellente préparation du Congrès.

Ensuite, M. G. Bratu a prononcé le discours suivant:

»Mesdames et Messieurs! Au nom de la Délégation des Universités Roumaines, je remercie infiniment M. le Professeur Sierpiński et tous nos chers collègues polonais pour la cordialité avec laquelle ils nous ont acceuillis à ce Congrès.

Ceux de nous qui sont venus pour la première fois en Pologne garderont de ce Congrès les meilleurs souvenirs: il nous a permis de vivre quelques jours dans le milieu scientifique polonais et d'admirer vos beaux travaux dont les résultats ont été résumés dans des nombreuses conférences et communications. Grâce aux excursions que vous avez arrangées pour nous étrangers, grâce aux visites que nous avons pu faire à des différentes personnalités scientifiques et littéraires, grâce aux réceptions organisées par notre cher maître Sierpiński, nous avons eu l'occasion de connaître la bonté et la noblesse de la nation polonaise, nous avons été émus par l'amitié avec laquelle nous avons été reçus partout et nous avons été charmés par la finesse d'esprit, l'extrème amabilité et la gentillesse des dames polonaises.

Nous allons dire chez nous, en Roumanie, que nous avons été reçus ici avec une hospitalité qui dépassa tout ce que nous avons pensé et désiré. Nous tenons donc à vous exprimer dans cette séance de clôture nos plus vifs remerciements et notre certitude que ce Congrès constituera un nouveau pas vers la collaboration scientifique et vers l'union polono-roumaine de plus

en plus serrée et amicale. Je dis: un nouveau pas, car les débuts en ont été faits par vos deux premiers Congrès Mathématiques, ainsi que par les Congrès des Mathématiciens Roumains à Cluj et à Turn-Séverin, où nous avons eu l'honneur et le plaisir d'accueillir 15 savants polonais ayant à la tête notre cher et illustre maître, Profesor Sierpiński. Par les cours éminents qu'il a donné aux Universités de Bucarest, de Jassy et de Cluj, il a suscité tant d'admiration et d'affection pour lui et pour la Pologne que les professeurs et les étudiants des universités roumaines, surtout ceux de Cluj, lui sont restés attachés coeur et âme.

Nous vous exprimons aussi notre admiration pour l'organisation et la bonne réussite de ce Congrès; nous vous remercions pour l'accueil chaleureux que nous avons trouvé chez vous; nous vous invitons et vous prions de bien vouloir prendre part, vous aussi et de plus en plus nombreux, aux congrès que nous arrangerons en Roumanie, en vous assurant que vous trouverez chez nous l'amitié la plus sincère et fraternelle.

Nous pouvons aussi vous assurer que c'est à présent que nous avons découvert la véritable route qui va de Bucarest à Paris. Pour nous, elle passera dorénavant toujours par Varsovie.

Vivat, crescat, floreat mathematica Polonorum! Niech żyje współpraca i przyjaźń naukowa polsko-rumuńska! Niech żyje Polska!«.

Dans son allocution finale, M. Sierpiński a constaté qu'au Congrès se sont inscrits ou ont pris part 132 Membres effectifs. Le nombre total des communications a été 76, y compris les 8 conférences plénières. Dans l'ordre des numéros des sections, il y en avait: 13, 18, 15, 14 et 8. Après quoi il déclara le Congrès clos et leva la séance.

VIII. Jubilé du Professeur S. Dickstein. La cérémonie a été ouverte par M. Sierpiński, Président du Comité du Jubilé, au nom du III Congrès Polonais de Mathématique et de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, le 3 octobre 1937 à midi dans la Grande Salle de la Société au Palais Staszic, en présence des personnages officiels, des Membres du Congrès et de plus de 200 invités.

M. Sierpiński commença son discours par la lecture de la dépêche de félicitations envoyée par M. le Professeur Ignacy Mościcki, Président de la République Polonaise. Ensuite, au nom du Congrès et de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, dont il est Président, M. Sierpiński a exprimé les souhaits à M. Dickstein et, après avoir rappelé brièvement les très nombreux mérites scientifiques, pédagogiques et sociaux de M. Dickstein, il l'a remercié au nom de ladite Société pour le

don qu'il a fait récemment à cette dernière de son périodique *Prace Matematyczno-Fizyczne* et des effets de 16.000 zł., destinés à former le début d'un fond pour en continuer l'édition.

Ensuite parlèrent à tour de rôle: M. J. Zawadzki, Recteur de l'École Polytechnique de Varsovie, au nom du Ministre de l'Instruction Publique et des Cultes; M. J. Pohoski, Vice-Président de la Ville de Varsovie, au nom de la Municipalité; puis les représentants de l'Académie, des universités et des institutions scientifiques; au nom des invités étrangers réunis au Congrès, M. Maurice Fréchet, Professeur à la Sorbonne, enfin, au nom des mathématiciens roumains, le Professeur P. Sergescu. La longue liste des orateurs se ferma sur le discours du Professeur S. Thugutt, ancien Recteur de l'Université de Varsovie, représentant des plus anciens élèves de M. Dickstein, et sur celui de la représentante de ses plus jeunes élèves, qui lui offrit une gerbe de roses.

M. Dickstein, très ému, déclara en une réponse improvisée que la majeure partie des éloges qui lui sont adressés revient à ses collaborateurs, dont beaucoup, malheureusement, ont quitté la vie. Il exprima ensuite quelques souhaits qu'il formait en ce jour solennel et qui dépassent ses forces personnelles; ce sont les 5 tâches suivantes:

1⁰ rédiger l'histoire de la Faculté d'Histoire Naturelle et de Mathématique de l'ancienne École Centrale,

2⁰ organiser en 1943 sur une large échelle le 400-ème anniversaire de la mort de Copernic,

3⁰ terminer la bibliographie de mathématique polonaise, qui est déjà préparée par les soins de M. Dickstein jusqu'à l'anné 1915,

4⁰ composer l'histoire des sciences techniques en Pologne,

5⁰ éditer les monographies historiques des anciens établissements d'enseignement supérieur de Pologne, en premier lieu celles du Lycée de Krzemieniec et de l'École des beaux Arts.

La céremonie se termina par la lecture d'une partie des nombreux télégrammes et des lettres de félicitations, envoyées par les universités, les institutions et sociétés scientifiques, les savants et les amis du Professeur Dickstein du monde entier.

Le soir de ce même jour eut lieu un banquet auquel prîrent la parole: le Professeur W. Antoniewicz, Recteur de l'Université Joseph Piłsudski à Varsovie, le Professeur A. Poni-

kowski, ancien Premier Ministre et ancien Ministre de l'Instruction Publique de Pologne, M. P. Drzewiecki, ancien Président de la Ville de Varsovie, M. B. de Kerékjártó, Professeur à l'Université de Szeged, au nom des mathématiciens hongrois, et beaucoup d'autres.

IX. Liste des Délégués officiels au Congrès.

Petre Sergescu, Délégué de l'Université de Cluj et de la Société Roumaine do Mathématique,

Lamberto Cesari, Délégué de l'Institut pour les Applications du Calcul du Conseil National des Recherches à Rome,

Wacław Sierpiński, Délégué de l'Académie Polonaise des Sciences et des Lettres et de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie,

Franciszek Leja, Délégué de l'Université de Cracovie,

Eustachy Żyliński, Délégué de l'Université de Lwów,

Stefan Kempisty, Délégué de l'Université de Wilno.

Comptes-rendus des séances de la Société Polonaise de Mathématique

Section de Cracovie, année 1937

14. I. F. Leja: Remarques sur un théorème de MM. Pólya et Szegö [T. XV. de ces Annales, 1936, p. 168—177].

21. I. S. K. Zaremba: Remarques sur certaines généralisations des équations différentielles [*Cf. Remarques sur l'intégration approchée des équations différentielles,* Bull. Acad. Pol., Cl. des Sciences Math. et Nat., Série A, 1936, p. 528—535].

28. I. S. Gołąb: Sur une équation fonctionnelle [A paraître dans »Wiadomości Matematyczne« et dans »Mathematische Zeitschrift«].

4. II. S. Turski: Sur un travail de M. Vigo Brun concernant les nombres premiers.

18. II. F. Leja: Sur certaines fonctions harmoniques du point de l'espace [*Cf. Sur certaines fonctions limites liées aux ensembles fermés de points de l'espace,* dans ces Annales t. XV, 1936, p. 145—160].

4. III. K. Vetulani: Sur une représentation paramétrique des racines de l'équation algébrique du 4e degré.

Soit $x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4=0$ une équation pouvant être ramenée par une substition linéaire $x=y+\delta$ à la forme

$$y^4+2b_1y^3-2b_3y-b_4=0. \tag{1}$$

Désignons par α et β les rapports

$$\frac{b_3}{b_1}=\alpha, \qquad \frac{b_4}{b_1b_3}=\beta,$$

et soit ζ un paramètre tel qu'on ait

$$b_1=\frac{\zeta}{\beta}\sqrt{\alpha\zeta\frac{\zeta+2}{2\zeta+\beta}}.$$

Dans ces conditions, la valeur de y définie par la formule

$$y=\sqrt{\alpha\zeta\frac{\zeta+2}{2\zeta+\beta}}$$

satisfait identiquement à l'équation (1).

C'est un exemple simple de la méthode des représentations paramétriques qui s'applique à des équations algébriques générales jusqu'au 9e degré. Dans le cas d'une équation de degré plus élevé, la méthode des représentations paramétriques est plus compliquée; on doit introduire plusieurs paramètres jouant un rôle semblable à celui de ζ.

18. III. F. Leja: Généralisation de certaines fonctions d'ensembles [voir ce volume, p. 41—52].

29. IV. F. Leja: Sur le livre de R. Nevanlinna: Eindeutige analytische Funktionen, Berlin 1936.

13. V. T. Ważewski: Sur l'appréciation des intégrales des équations différentielles ordinaires dans le domaine complexe [voir ce volume, p. 97—111].

20. V. S. Gołąb et A. Turowicz: Une méthode axiomatique de la définition des nombres complexes conjugués [Paru dans »Opuscula Mathematica« f. 1 (1937)].

3. VI. Z. Zawirski: Essai sur le rattachement de la logique multivalente au calcul des probabilités.

10. VI. T. Ważewski: Quelques remarques sur les équations aux dérivées partielles du premier ordre (A paraître dans Math. Zeitschrift).

6. X. Lamberto Cesari: Sur les séries doubles numériques et celles de Fourier (Sulle serie doppie numeriche e di Fourier).

Si riferisce su varie ricerche riguardanti le serie doppie numeriche e di Fourier, pubblicate dall'autore in due memorie (Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, Ser. II, Vol. I, 1932, Reale Accademia d'Italia, memoria n. 10, Vol. VIII, 1937).

Richiamate le diverse nozioni di convergenza delle serie doppie numeriche quali sono state introdotte in numerose ricerche classiche e moderne, ed in particolare la nozione di convergenza in una direzione del Leja, si trovano tra esse varie relazioni non ancora note. In base a tali considerazioni si compie uno studio delle serie doppie di Fourier e si dimostra in particolare un teorema per mezzo del quale si riconosce come necessaria una condizione nella sommazione ordinaria e di Féjer delle serie doppie di Fourier che trovasi sempre ammessa nelle ricerche classiche.

13. X. T. Ważewski: Sur la méthode des approximations successives.

L'auteur présente un théorème dont voici une forme particulière.

Théorème. Supposons que les fonctions $H_i(x, u_1, ..., u_n, v_1, ..., v_n)$ jouissent des propriétés suivantes:

1) La fonction H_i $(i = 1, ..., n)$ est continue et non négative dans le domaine

(1) $$0 \leqslant x < a, \quad 0 \leqslant u_j, \quad 0 \leqslant v_j \qquad (j = 1, ..., n).$$

2) La fonction H_i (envisagée dans ce domaine) est croissante (au sens large) séparément par rapport à chacune des $2n-1$ variables $u_1, ..., u_n$, $v_1, ..., v_{i-1}, v_{i+1}, ..., v_n$.

3) Le système d'équations

$$\frac{dw_i}{dx} = H_i(x, w_1, ..., w_n, w_1, ..., w_n) \qquad (i = 1, ..., n)$$

(envisagées dans le domaine en question) admet une seule intégrale issue de l'origine et notamment l'intégrale identiquement nulle.

Supposons ensuite que les fonctions $f_i(x, w_1, ..., w_n, v_1, ..., v_n)$ soient continues dans le domaine

(2) $$|x| < a, \quad -\infty < u_j < +\infty, \quad -\infty < v_j < +\infty$$

et qu'elles y satisfassent aux inégalités

$$\begin{aligned} |f_i(x, \bar{u}_1, ..., \bar{u}_n, \bar{v}_1, ..., \bar{v}_n) - f_i(x, u_1, ..., u_n, v_1, ..., v_n)| \leqslant \\ \leqslant H_i(|x|, |\bar{u}_1 - u_1|, ..., |\bar{v}_n - v_n|) \end{aligned} \qquad (i = 1, ..., n)$$

et considérons le système d'équations

(3) $$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, ..., y_n, y_1, ..., y_n) \qquad (i = 1, ..., n).$$

Nous définissons pour un point initial quelconque O (de coordonnées $x=0$, $y_j = c_j$) une suite d'aproximations successives de la façon suivante. Comme premières approximations nous choisissons des fonctions arbitraires $y_j^1(x)$ (avec $y_j^1(0) = c_j$) continues dans l'intervalle $|x| < a$,

En supposant que la ν-ème approximation $y_i^\nu(x)$ $(i = 1, ..., n)$ est définie, nous definissons la $\nu + 1$-ème approximation comme l'intégrale (issue du point O) du système

$$\frac{dz_i}{dx} = f_i(x, y_1^\nu, ..., y_n^\nu, z_1, ..., z_n) \qquad (i = 1, ..., n).$$

On peut démontrer que la suite de ces approximations est uniformément convergente vers l'intégrale (issue du point O) du système (3). On peut apprécier l'intervalle dans lequel cette convergence a lieu. — Ce théorème peut être étendu à des domaines plus généraux que (2).

Ce théorème englobe comme cas particuliers certains résultats de M[lle] I. Jungermann qu'elle a obtenus dans son travail de magisterium en partant de problèmes posés par M. Ważewski.

Des théorèmes d'une construction analogue s'appliquent à certains systèmes d'équations aux dérivées partielles.

F. Leja: Rapport sur les travaux du III[e] Congrès des Mathématiciens polonais.

20. X. T. Ważewski: Sur les variétés d'éléments linéaires.

L'auteur démontre le théorème suivant:

Supposons que les fonctions $y_i(u_1, ..., u_p)$, $x_i(u_1, ..., u_p)$ $(i = 1, ..., n)$ soient de la classe C^1 au voisinage d'un point $U^0 = (u_1^0, ..., u_p^0)$. Ceci étant, la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une fonction $S(u_1, ..., u_p)$ de la classe C^1 pour laquelle on ait $dS \equiv \Sigma y_i dx_i$ (au voisinage de U^0) consiste en ce que l'on ait $[u_\alpha, u_\beta] \equiv 0$, c.-à-d. $\sum_i \frac{\partial x_i}{\partial u_\alpha} \frac{\partial y_i}{\partial u_\beta} - \frac{\partial x_i}{\partial u_\beta} \frac{\partial y_i}{\partial u_\alpha} \equiv 0$. Ce théorème peut être appliqué à la théorie des transformations canoniques.

L'auteur communique sans démonstration un théorème analogue relatif au cas où les x_i satisfont à la condition de Lipschitz.

L'auteur communique enfin certains théorèmes assurant l'existence des solutions du système $dz_i = \Sigma a_{i\nu}(z_1, ..., z_p, x_1 ... x_n) dx_\nu$ et de quelques autres systèmes dans le cas où les fonctions données satisfont à la condition de Lipschitz.

27. X. M. Jeżewski et F. Leja: La physique et la mathématique au Palais de la Découverte à l'Exposition Internationale à Paris, en 1937.

3. XI. F. Leja: Sur les suites de polynômes homogènes bornés sur une courbe. [A paraître dans les »Annales de l'Académie des Sciences Techniques à Varsovie« en 1938].

10. XI. H. Wileński: Sur certaines propriétés de la loi de Gauss.

Considérons deux variables éventuelles:

$$x = a\xi + \alpha, \quad y = b\xi + \beta. \tag{1}$$

On démontre le théorème suivant: Si 1° les variables éventuelles α, β et ξ sont mutuellement indépendantes, 2° la régression de y par rapport à x est linéaire, quelles que soient les constantes a et b, et si 3° le premier moment de la variable x existe, alors les variables ξ et α obéissent à la loi de Gauss.

La démonstration basée sur la notion de la fonction caractéristique va paraître dans les »Statistical Research Memoirs« publié par I. Neyman et E. S. Pearson.

17. XI. J. de Weyssenhoff: Sur les théorèmes généralisés de Gauss et de Stokes (I^e partie) [*Cf. Duale Grössen, Grossrotation, Grossdivergenz und die Stokes-Gausschen Sätze in allgemeinen Räumen*, dans ce volume, p. 127—144].

24. XI. S. Gołąb: Sur le possibilité de la définition du nombre conjugué dans le champ des nombres hypercomplexes.

1. XII. Séance consacrée à René Descartes à l'occasion du 300[e] anniversaire de sa Géométrie.

A. Birkenmajer: Descartes comme mathématicien.

W. Wilkosz: Le rôle de Descartes dans la philosophie des mathématiques.

15. XII. J. Weyssenhoff: Sur les théorèmes généralisés de Gauss et de Stokes (II[e] partie) [*Cf. loc. cit.*].

Comptes-rendus des séances de la Société Polonaise de Mathématique

Section de Varsovie, année 1937

[Abréviations: C. R.=Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences (Paris); C. R. Varsovie = Comptes Rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, cl. III; F. M.=Fundamenta Mathematicae].

8. I. S. Mazurkiewicz: Ultraconvergence et espace fonctionnel [F. M. 28 (1937), p. 289].

Z. Waraszkiewicz: Sur les courbes planes topologiquement homogènes [C. R. 204 (1937), p. 1388].

15. I. C. Kuratowski: Sur les théorèmes du »plongement« dans la théorie de la dimension [F. M. 28 (1937), p. 336].

S. Kempisty (Wilno): Sur l'intégrale de Perron des fonctions de n variables.

22. I. A. Zygmund (Wilno): Remarques sur les fonctions indépendantes [Cf. J. Marcinkiewicz et A. Zygmund: Sur les fonctions indépendantes, F. M. 29 (1937), p. 215].

29. I. W. Sierpiński: Sur la non existence d'opération universelle pour les ensembles dénombrables [F. M. 29 (1937), p. 9].

— Sur un problème de la mesure.

K. Borsuk: Sur l'addition homologique des types des transformations continues en surfaces sphériques [Annals of Mathematics 38 (1937), p. 733].

12. II. W. Sierpiński: Sur une décomposition du segment [F. M. 29 (1937), p. 26].

A. Lindenbaum: Sur l'indépendance de l'axiome du choix.

26. II. A. J. Ward (Cambridge, England): A sufficient condition for a function of interval to be monotone [F. M. 29 (1937), p. 22].

W. Sierpiński: Sur un problème de la théorie générale des ensembles concernant les familles boreliennes d'ensembles [F. M. 29 (1937), p. 206].

12. III. E. Otto (Lwów): Sur une propriété caractéristique de l'ellipsoïde.

19. III. A. Tarski: Über unerreichbare Kardinalzahlen [F. M. 30 (1938), p. 68].

9. IV. G. Kurepa (Zagreb): Sur le problème de Souslin.

16. IV. S. Eilenberg: Sur les courbes faiblement enlacées [C. R. 204 (1937), p. 1226 et F. M. 29 (1937), p. 118].

K. Borsuk: Un théorème sur les prolongements des fonctions continues.

Soit A un sous-ensemble fermé d'un espace métrique M et soit $\varphi(x,t)$ une fonction continue de deux variables $x \in A$ et $0 \leqslant t \leqslant 1$, avec les valeurs appartenant à une sphère euclidienne n-dimensionnelle S_n (ou, plus généralement, à un rétracte absolu de voisinage). La fonction $\varphi(x,t)$ peut être considerée comme une fonction continue définie sur le sous-ensemble $A \times \langle 0,1 \rangle$ du produit cartésien $M \times \langle 0,1 \rangle$ de M et de l'intervalle fermé $\langle 0,1 \rangle$.

Théorème. Si la fonction $\varphi(x) = \varphi(x,0)$ *(d'une seule variable* $x \in A$*) admet un prolongement continu* $\psi(x)$ *sur l'espace* M*, avec les valeurs appartenant à* S_n*, alors la fonction* $\varphi(x,t)$ *admet un prolongement continu* $\psi(x,t)$ *sur l'espace* $M \times \langle 0,1 \rangle$*, avec les valeurs appartenant à* S_n*, tel que* $\psi(x,0) = \psi(x)$ *pour tout* $x \in M$.

Démonstration. En posant $\psi'(x,t) = \varphi(x,t)$ pour $(x,t) \in A \times \langle 0,1 \rangle$ et $\psi'(x,0) = \psi(x)$ pour tout $x \in M$, on obtient un prolongement continu de $\varphi(x,t)$ sur le sous-ensemble fermé $B' = A \times \langle 0,1 \rangle + M \times (0)$ de l'espace $M \times \langle 0,1 \rangle$. La sphère S_n étant un rétracte absolu de voisinage, il existe un prolongement continu $\psi''(x,t)$ de $\psi'(x,t)$ (avec les valeurs appartenant à S_n) sur un entourage ouvert U de B' dans l'espace $M \times \langle 0,1 \rangle$. Envisageons deux fonctions réelles r_1 et r_2 définies dans M comme il suit:

$$r_1(x) = 1 \text{ pour tout } x \in A; \; r_1(x) = 0 \text{ pour tout } x \in M - A,$$
$$r_2(x) = \operatorname{Inf}\{\underset{t}{E}[(x,t) \in (M \times \langle 0,1 \rangle - U) + M \times (1)]\} \text{ pour tout } x \in M.$$

Or, la fonction $r_1(x)$ étant supérieurement semi-continue et $r_2(x)$ — inférieurement semi-continue et $r_1(x) \leqslant r_2(x)$ pour tout $x \in M$, on conclut[1]) qu'il existe une fonction continue $r_0(x)$ satisfaisant à l'inégalité $r_1(x) \leqslant r_0(x) \leqslant r_2(x)$ pour tout $x \in M$. Or, en posant $r(x,t) = (x, \operatorname{Min}(t, r_0(x)))$, on obtient une transformation continue r de $M \times \langle 0,1 \rangle$ en un ensemble B satisfaisant à l'inclusion $B' \subset B \subset U$, telle que $r(x,t) = r(x,t)$ pour tout $(x,t) \in B$. Il ne reste donc qu'à poser

$$\psi(x,t) = \psi'(r(x,t)) \quad \text{pour tout} \quad (x,t) \in M \times \langle 0,1 \rangle,$$

afin de parvenir au prolongement demandé.

---

[1]) Voir F. Hausdorff, Mengenlehre, Berlin—Leipzig 1927, p. 248, th. II.

K. Borsuk: Un théorème sur les prolongements des transformations [F. M. 29 (1937), p. 160].

S. Eilenberg: Sur les ensembles plans localement connexes [F. M. 29 (1937), p. 159].

7. V. R. Zakon: Ein Satz über endliche Gruppen [Wiadomości Matematyczne 45 (1938)].

C. Kuratowski: Une propriété topologique du simplexe.

Désignons par S le simplexe (fermé) à n dimensions $p_0 ... p_n$ et par F_i la face du simplexe opposée au sommet p_i ($0 \leqslant i \leqslant n$).

Théorème. *Etant donnés n ensembles ouverts $G_1, ..., G_n$ tels que $G_i F_i = 0$ et dont la somme $G_1 + ... + G_n$ coupe le simplexe S entre p_0 et F_0, on a $G_1 \cdot ... \cdot G_n \neq 0$.*

Il existe, par hypothèse, deux ensembles fermés A et B tels que $S - (G_1 + ... + G_n) = A + B$, $AB = 0$, $p_0 \in A$, $F_0 \subset B$. Soit H_0 un ensemble ouvert tel que $A \subset H_0$ et $B \subset S - \overline{H}_0$. Posons, pour $i > 0$, $H_i = G_i + S - \overline{H}_0 - F_i$. Donc, quel que soit $i \geqslant 0$, on a $H_i F_i = 0$. Comme $F_1 \cdot ... \cdot F_n = p_0$, il vient

$$H_0 + ... + H_n = H_0 + G_1 + ... + G_n + S - \overline{H}_0 - p_0 = S.$$

$A_0, ..., A_n$ étant un système d'ensembles fermés tels que $A_0 + ... + A_n = S$ et $A_i \subset H_i$ [1]), d'où $A_i F_i = 0$, on a [2]) $A_0 \cdot ... \cdot A_n \neq 0$. Par conséquent $H_0 \cdot ... \cdot H_n \neq 0$, d'où $G_1 \cdot ... \cdot G_n \neq 0$, car $H_0 \cdot (S - \overline{H}_0 - F_i) = 0$.

Corollaire. *Si $Z \subset S - F_0 - p_0$ et $\dim Z \leqslant n - 2$, il existe un sous-continu de $S - Z$ unissant p_0 à F_0.*

Posons $U_i = S - F_i - F_0$. Comme $U_1 + ... + U_n = S - p_0 - F_0 \supset Z$, l'inégalité $\dim Z \leqslant n - 2$ implique [3]) l'existence d'un système d'ensembles ouverts $G_1, ..., G_n$ tels que $G_1 + ... + G_n \supset Z$, $G_1 \cdot ... \cdot G_n = 0$ et $G_i \subset U_i$, d'où $G_i F_i = 0$. D'après le théorème précédent, l'ensemble $G_1 + ... + G_n$ ne coupe donc pas le simplexe S entre p_0 et F_0. Comme, en outre, $p_0 + F_0 \subset S - (G_1 + ... + G_n)$, puisque $G_1 + ... + G_n \subset U_1 + ... + U_n = S - p_0 - F_0$, il existe donc une composante de l'ensemble $S - (G_1 + ... + G_n)$ qui contient p_0 et F_0. Cette composante contient un continu C unissant p_0 à F_0. Ainsi $C \subset S - (G_1 + ... + G_n) \subset S - Z$, c. q. f. d.

On déduit facilement du corollaire le théorème de M. Mazurkiewicz [4]) d'après lequel *le complémentaire d'un ensemble de dimension $\leqslant n - 2$ situé dans l'espace euclidien à n dimensions est un semi-continu.*

---

[1]) En ce qui concerne l'existence de ce système, voir p. ex. ma *Topologie* I, p. 96.

[2]) Selon le corollaire p. 136 des Fund. Math. 14 (1929) (note de MM. Knaster, Mazurkiewicz et moi). Cf. aussi E. Sperner. Abh. Math. Sem. Hamburg VI (1928), p. 265.

[3]) Voir W. Hurewicz, Proceed. Amsterdam XXX, p. 425.

[4]) Fund. Math. 13 (1929), p. 211.

C. Kuratowski: Coupures irréductibles et multiplicités cantoriennes.

Théorème d'addition. *Si l'espace métrique séparable X est la somme de deux ensembles fermés A_1 et A_2 tels que* $\dim A_1A_2 \leqslant n-2$ *et si la transformation continue f de X en sous-ensemble de la surface sphérique S_n est inessentielle sur A_1 et A_2, f est inessentielle (sur $A_1+A_2=X$).*

Désignons par $\Delta(X)$ l'espace qui s'obtient du produit cartésien $X\times\langle 0,1\rangle$ en réduisant la »base« $X\times 1$ à un seul point[1]). Il existe, par hypothèse, une extension f_i $(i=1,2)$ de la fonction partielle $f|A_i$ sur $\Delta(A_i)$. La fonction g_i identique à f sur X et à f_i sur $\Delta(A_i)$ est donc une extension de f sur $X+\Delta(A_i)$. Comme $[X+\Delta(A_1)][X+\Delta(A_2)]-X\subset\Delta(A_1)\Delta(A_2)=\Delta(A_1A_2)$, d'où $\dim\{[X+\Delta(A_1)][X+\Delta(A_2)]-X\}\leqslant n-1$, il existe[2]) une extension g de f sur $[X+\Delta(A_1)]+[X+\Delta(A_2)]=\Delta(X)$.

Corollaire. *Si $f\in S_n^X$ et X est irréductible par rapport à la propriété que f est essentielle (c.-à-d. que sur chaque vrai sous-ensemble fermé de X, f est inessentielle), X est une multiplicité cantorienne en dimension n.*

Il est, en effet, impossible de décomposer X en deux ensembles fermés A_1 et A_2 tels que $A_1\neq X\neq A_2$ et $\dim A_1A_2\leqslant n-2$.

Rapprochons ce corollaire du théorème[3]) d'après lequel, si X est un sous-ensemble fermé de la surface S_{n+1} et en est une coupure irréductible entre les deux pôles et si f désigne la projection de X sur l'équateur (effectuée le long des méridiens), X est irréductible par rapport à la propriété que f est essentielle. On en déduit directement qu'*une coupure irréductible de S_{n+1} est une multiplicité cantorienne en dimension n*[4]).

28. V. A. Wundheiler: Sur les mouvements sur une trajectoire donnée [Enseignement Mathématique (1938)].

S. Eilenberg: Sur les points où un ensemble est de dimension n.

4. VI. W. Sierpiński: Le théorème de M. Lusin comme une proposition de la théorie générale des ensembles [F. M. 29 (1937), p. 182].

S. Banach: The Lebesgue integral in abstract spaces [S. Saks, Theory of the Integral. Monografie Matematyczne VII, Warszawa—Lwów 1937, Note II, p. 320].

---

[1]) $\Delta(X)$ est le »join« (en terminologie anglaise) de l'espace X et d'un point.

[2]) Selon un théorème de M. Hurewicz, Prace Mat.-Fiz. 1937.

[3]) S. Eilenberg, Fund. Math. 26 (1936), p. 104.

[4]) Pour une démonstration à l'aide des homologies, voir P. Alexandroff *Dimensionstheorie*, Math. Ann. 106 (1932), p. 227. Le théorème remonte à P. Urysohn, *cf.* Fund. Math. 7 et 8.

18. VI. A. Tarski: Über das Repräsentationsproblem [1]).

Es wird der Beweis folgendes Satzes skizziert:

I. Es seien $\mathfrak{m}$ *und* $\mathfrak{p}$ *zwei unendliche Kardinalzahlen, so dass* $\mathfrak{m} \geqslant \mathfrak{p}$; *es sei ferner* M *eine Menge mit der Mächtigkeit* $\mathfrak{m}$, K *ein Mengenkörper und* I *ein Ideal in* K, *bestimmt durch die Formeln:*

$$K = \underset{X}{\mathrm{E}}[X \subset M] \qquad I = \underset{X}{\mathrm{E}}[X \subset M \,\&\, \overline{\overline{X}} < \mathfrak{p}].$$

Dann hat das (K, I)*-Repräsentationsproblem keine Lösung.*

In Fall: $\mathfrak{m}=\mathfrak{p}$ kann dieser Satz in folgender Weise verschärft werden:

II. Ist $\overline{\overline{M}} = \mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$, $K = \underset{X}{\mathrm{E}}[X \subset M]$ *und* $I = \underset{X}{\mathrm{E}}[X \subset M \,\&\, \overline{\overline{X}} < \mathfrak{m}]$, *so ist der Restklassenring* K/I *zu keinem Unterkörper von* K *isomorph.*

Aus I ergibt sich leicht:

III. Ist K *ein Körper, der eine Menge* M *von der Mächtigkeit* $\mathfrak{c}$ *und alle ihre Teilmengen als Elemente enthält (also z. B. der Körper der im Lebesgue'schen Sinne messbaren Mengen eines euklidischen Raumes) und ist* I *das Ideal der höchstens abzählbaren Mengen des Körpers* K, *so hat das* (K, I)*-Repräsentationsproblem keine Lösung.*

Auf Grund der Continuumhypothese können weitere Ergebnisse von verwandtem Charakter gewonnen werden, z. B.

IV. Unter den Voraussetzungen von III ist der Ring K/I *zu keinem Unterkörper von* K *isomorph.*

V. K_1 *sei der Körper der Mengen eines euklidischen Raumes,* K_2 *der im Lebesgue'schen Sinne meßbaren Mengen und* K_3 *der Körper der Mengen vom Lebegue'schen Maße* 0; *ferner sei* I *das Ideal der Mengen erster Kategorie. Dann hat des* (K_1, I) *-, bzw.* $(K_1, K_2 \cdot I)$ *-, bzw.* $(K_1, K_3 \cdot I)$ *-, bzw.* $(K_2, K_2 \cdot I)$ *-, bzw.* $(K_2, K_3 \cdot I)$ *-, bzw.* $(K_3, K_3 \cdot I)$*-Repräsentationsproblem keine Lösung, und die Ringe* K_1/I, $K_1/K_2 \cdot I$... *sind zu keinen Unterkörpern der entsprechenden Körper isomorph.*

Ein analoger Satz gilt auch für den Körper der Mengen, die der Baire'schen Bedingung genügen, bzw. erster Kategorie sind, und für das Ideal der Mengen vom Lebesgue'schen Maße 0.

Die Beweise stützen sich u. a. auf Sätzen von Sierpiński in Fund. Math. 28 (1930), S. 111 ff. und 115 ff.

V. Knichal (Praha): Sur les superpositions des automorphies continues d'un intervalle fermé.

Soit C l'ensemble de toutes les fonctions $f(x)$ croissantes et continues, définies sur l'intervalle fermé $I = \langle 0, 1 \rangle$ telles que $f(0)=0$, $f(1)=1$.

---

[1]) Vgl. J. von Neumann und M. H. Stone, F. M. 25 (1935) und A. Tarski, C. R. Varsovie 30 (1937).

Théorème. *Il existe deux fonctions $\varphi, \psi \in C$ jouissantes de la propriété suivante: pour chaque $f \in C$ et $\varepsilon > 0$ il existe deux nombres entiers positifs n et m, tels qu'on ait*

$$|f(x) - \psi^n \varphi^m(x)| < \varepsilon \quad \textit{pour} \quad x \in I.$$

25. VI. Z. Waraszkiewicz: Le théorème sur le point fixe des courbes planes acycliques [à paraître dans les F. M.].

S. Saks: Remarques sur la théorie abstraite de l'intégrale [à paraître dans le Bull. Amer. Math. Soc.].

5. X. H. Hopf: (Zürich): Einige Sätze über Abbildungen von Mannigfaltigkeiten.

I. Jede Sphäre ungerader Dimension gestattet eine »Faserung« in Großkreise (Fund. Math. 25 (1935), 427 ff., besonders 438—440). ***Satz: Der Grad einer Abbildund der Sphäre S^{2k-1} in sich, bei welcher diese Faserung in sich übergeht, ist eine k-te Potenz.*** — Dieser Satz über »fasertreue« Abbildungen ist ein Analogon zu dem Satz von Borsuk über antipodentreue Abbildungen. (Er wurde gemeinsam von M. Rueff, Zürich, und dem Vortragenden bewiesen).

II. Eine Abbildung f eines Zyklus z heiße »algebraisch unwesentlich«, falls $f(z)$ homolog 0 im Bildraume ist. ***Satz: Ist n gerade, so wird bei jeder algebraisch unwesentlichen Abbildung des Sphärenproduktes $S^n \times S^n$ in eine (geschlossene orientierbare) Mannigfaltigkeit beliebiger Dimension wenigstens eine der beiden Faktorsphären ebenfalls algebraisch unwesentlich abgebildet.*** — Dieser Satz ist eine Verallgemeinerung eines Satzes aus Fund. Math. 25 (1935), p. 436, und seinerseits Spezialfall eines wesentlich allgemeineren Satzes.

C. Kuratowski: Quelques théorèmes sur le plongement topologique des espaces [F. M. 30 (1938), p. 8].

S. Eilenberg: Une généralisation du théorème de M. Hopf.

Le théorème de M. H. Hopf (Comment. Math. Helv. 5 (1932), p. 39) concernant les classes de transformations continues d'un polyèdre n-dimensionnel P_n en surface sphérique n-dimensionnelle S_n reste vrai pour les polyèdres P_m de dimension m arbitraire, pourvu que tous les cycles k-dimensionnels dans P_m y soient homologues 0 pour $k > n$.

22. X. W. Sierpiński: Sur le plus petit corps contenant une famille donnée d'ensembles [F. M. 30 (1038), p. 15].

S. Eilenberg: Sur les transformations à petites tranches [F. M. 30 (1938), p. 92].

29. X. F. Rothberger (Wien): Eine Verschärfung der Eigenschaft (C) [F. M. 30 (1938), p. 50].

W. Sierpiński: Remarques sur le problème de l'invariance topologique de la propriété (C) [F. M. 30 (1938), p. 56].

12. XI. W. Sierpiński: Sur un problème concernant les fonctions projectives [F. M. 30 (1938), p. 57].

— Sur un problème concernant les ensembles projectifs [F. M. 30 (1938), p. 61].

A. Tarski: Eine äquivalente Formulierung des Auswahlaxioms [F. M. 30 (1938)].

3. XII. W. Nikliborc: Über das Dreikörperproblem I.

10. XII. E. Szpilrajn: Remarques sur la propriété de Baire.

W. Nikliborc: Über das Dreikörperproblem II.

17. XII. W. Sierpiński: Sur une propriété additive d'ensembles [C. R. Varsovie 30 (1937)].

A. Zygmund (Wilno): On the convergence of power series on the circle of convergence.

J. Marcinkiewicz and A. Zygmund (Wilno): On a theorem of Lusin [à paraître dans les Trans. Amer. Math. Society].

A. Tarski: Über das absolute Mass linearer Punktmengen [F. M. 30 (1938)].

Comptes-rendus des séances de la Société Polonaise de Mathématique

Section de Lwów, années 1936 (seconde moitié) et 1937

24. X. 1936. W. Nikliborc: Les fondements de la dynamique.

M. Kac: Quelques applications des intégrales de Fourier.

29. X. 1936. P. Sergesco: Sur l'atmosphère mathématique du XVII-ième siècle.

5. XI. 1936. R. Wavre: Le potentiel newtonien en tant que fonction analytique.

21. XI. 1936. S. Mazur: Sur les problèmes insolubles.

H. Steinhaus: Sur la courbe de Peano [Comm. Math. Helvet., IX].

12. XII. 1936. S. Ruziewicz: Sur quelques hypothèses équivalentes à l'hypothèse du continu.

S. Mazur: Sur quelques systèmes fermés de fonctions.

23. I. 1937. S. Banach et S. Mazur: Sur les fonctions calculables.

6. II. 1937. M. Kac: Une remarque sur les polynômes de Bernstein [Stud. Math. VII].

S. Mazur: Sur les caractéristiques des espaces euclidiens et hyperboliques.

20. II. 1937. M. Eidelheit: Sur les systèmes d'équations linéaires [Stud. Math. VII].

M. Kac: Sur les distrubutions des valeurs de certaines fonctions, I[e] partie.

6. III. 1937. E. Otto: Une propriété caractéristique de l'ellipsoïde.

20. III. 1937. A. J. Ward: Sur un problème de M. Mazur.

W. Nikliborc: Sur le problème des trois corps, I[e] partie.

24. IV. 1937. T. Banachiewicz: Les déterminants cracoviens et les équations linéaires.

E. Żyliński: Quelques remarques sur la théorie des nombres.

1. V. 1937. Stoïlow: Sur les surfaces de Riemann.

W. Nikliborc: Sur le problème des trois corps, II[e] partie.

15. V. 1937. M. Kac et H. Steinhaus: Sur les modèles d'Ehrenfest et de Hertz.

24. VI. 1937. M. Kac: Sur les distrubutions des valeurs de certaines fonctions, II[e] partie.

S. Ulam: Compte-rendu d'un voyage scientifique.

3. VII. 1937. J. v. Neumann: Kontinuierliche Geometrie.

30. X. 1937. M. Kac: Sur les zéros des intégrales de Fourier.

6. XI. 1937. H. Steinhaus: Compte-rendu d'une conférence à Genève.

13. XI. 1937. M. Eidelheit: Sur un problème de M. Steinhaus.

M. Kac: Quelques remarques sur les fonctions indépendantes [Stud. Math. VII].

Comptes-rendus des séances de la Société Polonaise de Mathématique

Section de Wilno, année 1937

10. II. M. Krzyżański: Sur la solution d'une équation du type parabolique, déterminée par les données dans un plan caractéristique [Paraîtra dans Stud. Math.].

J. Marcinkiewicz et A. Zygmund: La surconvergence des séries de puissances [Mathematica, XIII].

3. III. A. Ward: Sur les fonctions monotones d'intervalle [Fund. Math., XXIX].

S. Kempisty: Fonctions de triangle et leurs applications au calcul de l'aire d'une surface [Prace Towarzystwa Przyjaciół Nauk w Wilnie, XI].

19. IV. M. Krzyżański: Les fonctions à variation bornée d'après Hardy [Prace Towarzystwa Przyjaciół Nauk w Wilnie, XI].

J. Marcinkiewicz et A. Zygmund: Sur certaines propriétés des fonctions indépendantes [Stud. Math. VII].

10. V. D. Wajnsztejn: Sur les systèmes numériques hypercomplexes de Clifford-Lipschitz [voir ce volume, p. 65—83].

— Les fonctions univalentes dans le voisinage d'une direction.

24. V. J. Marcinkiewicz: Sur la loi du logarithme itéré [Fund. Math. XXVIII].

22. XI. J. Rudnicki: Sur le champ des valeurs d'une forme quadratique.

6. XI. J. Marcinkiewicz: Sur les mouvements de Brown [Acta Szeged, XI].

A. Zygmund: Sur la convergence et la sommabilité de certaines séries de puissances [A paraître dans Fund. Math.].

Comptes-rendus des séances de la Société Polonaise de Mathématique

Section de Poznań, année 1937

29. I. W. Ślebodziński: Sur quelques problèmes de géométrie affine [C. R. **204**, 1937, 1536—1538].

13. II. S. Kaczmarz: Problèmes de multiplicateurs dans la théorie des séries orthogonales.

Le conférencier, après un exposé historique du problème des multiplicateurs, à caractérisé trois types de problèmes: 1) Celui des conditions nécessaires et suffisantes pour que la suite $\{\lambda_n\}$ soit un multiplicateur de la classe (A, B); 2) celui des relations entre les multiplicateurs des diverses classes; 3) l'étu le, comme dans les deux cas précédents, des suites $\{\lambda_n\}$ étant des multiplicateurs d'une classe donnée pour chaque distribution $(\pm \lambda_n)$ des signes $+$ et $-$.

Le conférencier a terminé en communiquant certains nouveaux résultats obtenus en collaboration avec M. Marcinkiewicz.

— Sur la résolution approchée des systèmes d'équations linéaires.

20. II. W. Orlicz: Sur les problèmes de la théorie générale des systèmes orthogonaux.

Exposé des types les plus importants de problèmes et état actuel de la théorie générale des systèmes orthogonaux. Enumération de quelques problèmes non résolus.

Le conférencier expose les types les plus importants de problèmes ainsi que l'état actuel de la théorie générale des systèmes orthogonaux. Après avoir brièvement traité quelques exemples de systèmes orthonaux classiques et non classiques (tels que ceux de Haar, Rademacher et autres), il passe aux problèmes de convergence des séries orthogonales. Ces problèmes se rapportent soit à la convergence en un point, soit à la convergence presque partout. Dans le cas de la convergence en un point, il s'agit en premier lieu de déterminer des conditions caractéristiqus pour que toute fonction appartenant à un espace fonctionnel admette un développement convergent en un point donné. Ces recherches conduissent à la théorie plus générale des intégrales singulières, que le confériencier explique par quelques exemples. Ensuite, il donne une image des problèmes de convergence et de sommabilité presque partout, en se basant sur quelques théorèmes de Rademacher, Menchoff, Kaczmarz et autres et il commente les phénomènes de divergence (théorèmes de Menchoff, Banach, Orlicz et autres). Finalement, il s'occupe des propriétés des développements orthogonaux formels et traite surtout: a) les conditions caractéristiques pour qu'une série orthogonale soit le développement d'une fonction de l'espace (L^{α}), b) diverses espèces de recherches relatives aux propriétés de structure des ensembles de suites de coefficients correspondant à des fonctions d'une classe fonctionnelle déterminée (théorème de Riesz-Fischer et ses généralisations, problèmes des multiplicateurs, des majorantes, des singularités de Carleman et ct.). Au cours de la conférence, plusieurs problèmes non résolus ont été indiqués.

27. II. S. K. Zaremba: Sur les inégalités différentielles.

Le conférencier esquisse une théorie généralisant celle des équations différentielles. Au lieu d'un système de n équations différentielles

$$y_i'=\varphi_i(x, y_1, y_2, ..., y_n) \qquad (i=1, 2, ..., n),$$

on considère un système de n doubles inégalités de la forme

$$f_i(x, y_1, y_2, ..., y_n) \leqq \underline{y}' \leqq \overline{y}' \leqq F_i(x, y_1, y_2, ..., y_n) \quad (i=1, 2, ..., n),$$

les fonctions f_i et F_i étant continues et satisfaisant identiquement dans leur domaine d'existence aux inégalités $f_i \leqq F_i$.

La théorie des inégalités différentielles est contenue dans celle des *équations au paratingent,* développée précédemment par le conférencier (Bull. des Sc. Math. (2) LX, 1936 ou bien Dodatek do Rocznika Polskiego Tow. Mat., IX, 1935), mais grâce, d'une part à la possibilité d'employer l'algorythme du calcul différentiel classique et d'autre part à la généralité même des notions introduites, on arrive à développer une théorie qui dans ses débuts est plus simple que celle des équations différentielles et qui peut trouver des applications diverses. La théorie des équations différentielles est contenue dans cette théorie, dans laquelle on retrouve tous les théorèmes topologiques connus jusqu'á présent de la théorie les systèmes d'équations différentielles les plus généraux.

16. III W. Nikliborc: Sur la réduction du système d'équations différentielles dans le problème des trois corps.

— Sur les fondements de la dynamique.

6. XII. M. Biernacki: Sur une équation différentielle du quatrième ordre.

Le conférencier a étudié l'équation:

$$x^{IV}(t)+A(t)x(t)=0$$

dans laquelle $A>0$, tandis que A' est continue et $\geqslant 0$ lorsque $t\geqslant t_0$.

Le conférencier a obtenu les résultats suivants:

1) il existe une infinité d'intégrales linéairement distinctes et qui satisfont à la relation:

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\, x\sqrt{A}>0;$$

2) si A'' est continue et $\leqslant 0$, ou bien si $A''\geqslant 0$ mais A''' est continue et $\leqslant 0$ pour $t\geqslant t_0$, il existe une infinité d'intégrales $x(t)$ linéairement distinctes et telles que si t_1 et t_2 $(t_0<t_1<t_2)$ sont deux zéros consécutifs quelconques de $x(t)$, $x'(t)$ a un seul zéro dans l'intervalle (t_1, t_2).

W. Orlicz: Sur les fonctions continues sans dérivée.

Le conférencier donne, entre autres, une démonstration simple du théorème suivant: Soit $\omega(h)>0$ une fonction monotone pour $h>0$ et tendant vers 0 pour $h\to 0$ et soit

$$\alpha_n>0,\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n<+\infty,\qquad \beta_n\to+\infty,\qquad \lim\frac{\alpha^n}{\omega\left(\dfrac{1}{\beta_n}\right)}=+\infty.$$

Si l'on désigne par (n) l'espace des suites $\eta\equiv\{\eta_n\}$, $\eta_n=1, 0$ et si, pour $\eta\in(n)$ on pose

$$g_\eta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\cos\beta_n x,$$

alors pour toutes les suites η, en dehors d'un ensemble de première catégorie, on a

$$\overline{\lim_{h\to 0}}\frac{|g_\eta(x+h)-g_\eta(x)|}{\omega(h)}=+\infty,$$

x étant arbitraire.

Avertissement

L'assemblée générale de la Société Polonaise de Mathématique qui a eu lieu le 14 mars 1936 à Lwów, a décidé de réorganiser la Société en adoptant un nouveau statut, entré en vigueur le 11 janvier 1937. Les principales modifications introduites par le nouveau statut, dont les Membres de la Société recevront le texte sous forme de supplément au présent volume (Dodatek do Rocznika Polskiego Towarzystwa Matematycznego, t. X), sont les suivantes:

Le siège social est transféré à Varsovie (§ 2). Le droit de vote à l'Assemblée générale de la Société est réservé aux délégués des Sections locales et au Président de la Société (§ 11).

Une Section de Cracovie de la Société Polonaise de Mathématique, comprenant les Membres de la Société qui n'appartenaient jusqu'à présent à aucune Section locale, s'est constituée le 21 février 1937. C'est à cette section qu'est confiée la rédaction et l'administration des Annales de la Société Polonaise de Mathématique (§ 4, c), cette décision ne pouvant être modifiée que par un vote unanime de l'Assemblée Générale de la Société (§ 17).

Il existe trois catégories de Membres de la Société: les membres ordinaires, étrangers et honoraires (§ 5). Seuls les citoyens et les institutions polonaises peuvent être admis comme membres ordinaires (§ 5). Les membres ordinaires et étrangers sont élus par les Sections de la Société sur la proposition du Bureau de la Section et à la suite d'une présentation de deux membres ordinaires de la Société (§ 8). Les membres honoraires sont élus par l'Assemblée générale sur la proposition du Bureau de la Société.

Depuis le tome suivant, chaque volume des* Annales de la Société Polonaise de Mathématique *comportera deux parties distinctes; le corps du volume sera réservé aux mémoires et notes, tandis que les comptes-rendus et analyses, les comptes-rendus des séances et l'état de la Société paraîtront en deux livraisons semestrielles dont les pages seront numérotées en chifres romains.

État
de la Société Polonaise de Mathématique à la fin de l'année 1937

Bureau de la Société Polonaise de Mathématique: MM. S. Mazurkiewicz, *président*, M. Biernacki, J. Rudnicki, H. Steinhaus et S. Zaremba, *vice-Présidents*, B. Knaster, *secrétaire*, W. Orlicz, *trésorier*.

Commission de contrôle: MM. S. Dickstein, F. Leja et K. Żorawski.

Il existe cinq Sections de la Société. La section de Varsovie est présidée par M. B. Kuratowski, celle de Cracovie par M. S. Zaremba, celle de Lwów par M. S. Ruziewicz, celle de Poznań par M. M. Biernacki et celle de Wilno par M. J. Rudnicki.
